Capítulo 1

Conceitos Fundamentais de Mecânica Clássica

Prof. Dr. Walter Fr. Molina Jr

ESALQ/USP – 2017

Introdução

Este capítulo tem por objetivo rever alguns dos principais conceitos da mecânica clássica que serão úteis para o acompanhamento do conteúdo a ser discutido nos próximos capítulos, como forma de colaborar na compreensão de alguns dos fenômenos descritos. Com o mesmo propósito serão feitas considerações básicas sobre sistemas de medidas (e será adotado o Sistema Internacional de unidades), análise dimensional, erros, algarismos significativos e operações vetoriais.

Para início de discussão é necessário que se esclareça que, em se tratando de mecânica, as relações entre os fenômenos quase sempre implicam em variação de energia, quer seja ela *potencial* ou *atual*. No entanto, de acordo com a física newtoniana, que estuda tais relações, a definição de *energia* é difícil, principalmente se o meio de comunicação sobre o assunto é a verbalização. Desta forma o conceito que se tem sobre energia é muito mais intuitivo de que concreto e para efeitos práticos, sempre que necessário, será adotada a definição clássica de Otswald – *energia é trabalho, qualquer coisa que possa dele ser produzida ou nele convertida* (Nobelprize.org, 2016).

A energia ocorre de diversas formas: mecânica, calorífica, gravitacional, nuclear, elétrica, gravitacional, etc. Todas estas formas podem ser basicamente divididas em dois grandes grupos.

Energia Potencial

Diz-se que um sistema qualquer possui *energia potencial* quando seu estado possibilita que ele realize algum tipo de trabalho, mas por qualquer motivo, não o executa no momento considerado. A chuva decorre da energia calorífica recebida da radiação solar que aqueceu e evaporou das águas acumuladas na superfície do planeta Terra. No entanto, enquanto este vapor estiver contido nas nuvens, ele possui energia potencial acumulada. Neste caso existe a possibilidade de se chamar este tipo de energia de *energia de posição* ou *potencial gravitacional*. O mesmo ocorre com uma mola comprimida. Para atingir tal estado este dispositivo absorveu energia e a armazenou como *energia potencial elástica.*

Energia Atual

Quando um sistema realiza trabalho no momento considerado (atual), diz-se que ele possui *energia atual*. Esta pode manifestar-se de diversas formas, como luminosa (no caso de uma lâmpada), calorífica (mediante transferência de calor que pode ser obtida pelo filamento incandescente desta mesma lâmpada) ou cinética que seria obtida da condensação do vapor existente nas nuvens usadas como exemplo anterior, que se precipitará sob a forma de gotas de chuva.

1.1 Sistemas de unidades

Os fenômenos físicos frequentemente estão relacionados a *entidades abstratas* que são associadas a unidades de medida, cujo objetivo é possibilitar a quantificação da grandeza sobre qual se está tratando. Assim, comprimento, massa, tempo intensidade de corrente elétrica, temperatura termodinâmica, intensidade luminosa e quantidade de matéria[1], necessitam de unidades de medida para que se estabeleçam métodos de quantificação. Dentre estas entidades, algumas estão perfeitamente definidas quando a unidade que a quantifica é utilizada, sendo suficiente para identificar suas características. Este fato torna tais entidades *grandezas escalares*. Um exemplo típico é a massa. Quando alguém diz *um quilograma* de feijão, não será necessário especificar nenhum outro parâmetro para que se entenda sobre o que a pessoa se refere.

No entanto, para outras grandezas nem sempre um valor relativo a uma escala torna as informações suficientes para compreensão completa da ideia. Por exemplo, uma massa de um quilograma dentro de um campo gravitacional fica sujeita à força de atração. Tal força está direcionada para o centro da massa que gerou o campo gravitacional. Se no caso considerado a ação ocorrer na gravidade terrestre, será gerada uma força equivalente a um 9,8N (ou um quilograma-força) e esta força será direcionada para o centro da Terra. Entidades e grandezas que necessitam de orientação no espaço recebem o nome de *grandezas vetoriais*.

Infelizmente, em virtude da grande diversidade de culturas, a humanidade não é unânime quando se trata de construir escalas para medir grandezas. Portanto, ao redor do mundo, existem variadas formas referenciais que servem de base para medições que tiveram origens na história de diversos povos. A este respeito, INMETRO (2007) afirma que "O desenvolvimento e a consolidação da cultura metrológica vêm-se constituindo em uma estratégia permanente das organizações, uma vez que resultam em ganhos de produtividade, qualidade dos produtos e serviços, redução de custos e eliminação de desperdícios. A construção de um senso de cultura metrológica não é tarefa simples, requer ações duradouras de longo prazo e depende não apenas de treinamentos especializados, mas de uma ampla difusão dos valores da qualidade em toda a sociedade". As mais conhecidas destas referências são o sistema métrico e o britânico. Mesmo assim, dentro destes dois sistemas existem variações. O presente trabalho optou por assumir como referência básica o Sistema Internacional de Unidades (SI), padronizado pelo Bureau Internacional de Pesos e Medidas (BIPM) que funciona sob autoridade da Conferência Geral de Pesos e Medidas (CGPM). De acordo com esta convenção as unidades de medida se dividem em *de Base* (mostradas na tabela 1.1) e as *Derivadas* (mostradas na tabela 1.2) que podem ser expressas a partir das unidades de Base, utilizando símbolos matemáticos de multiplicação e divisão.

Como esclarecimento, as unidades *de Base*, foram escolhidas arbitrariamente tendo como referência o uso e costumes, dentre aquelas que foram consideradas mais importantes por um grupo de especialistas.

---

[1] Não confundir com massa. Quantidade de matéria é uma unidade relacionada com as massas atômicas relativas e seu símbolo é o *mol*. É assim definida: O mol é a quantidade de matéria de um sistema contendo tantas entidades elementares quantos átomos existem em 0,012 quilograma de carbono 12 (INMETRO, 2007).

Algumas unidades derivadas, por questões práticas, tradição ou até em homenagem a cientistas e estudiosos recebem nomes e símbolos particulares e especiais. A tabela 1.3 mostra algumas delas e como se pode notar, é possível que delas derivem outras unidades particulares, em função das inúmeras possibilidades de combinações que a física oferece.

Tabela 1.1. Unidades Sistema Internacional *de Base* (INMETRO, 2007).

Grandeza	**Unidade de Base**		
	Nome	**Símbolo**	**Dimensão de Base**
Comprimento	metro	m	L
Massa	quilograma	kg	M
Tempo	segundo	s	T
Corrente elétrica	ampère	A	I
Temperatura termodinâmica	kelvin	K	Θ
Quantidade de matéria	mol	mol	N
Intensidade luminosa	candela	cd	J

Tabela 1.2. Unidades Sistema Internacional *Derivadas* (INMETRO, 2007).

Grandeza	**Unidade de Base**	
	Nome	**Símbolo**
Superfície	metro quadrado	m^2
Volume	metro cúbico	m^3
Velocidade	metro por segundo	m/s
Aceleração	metro por segundo ao quadrado	m/s^2
Número de ondas	metro elevado à potência -1	m^{-1}
Massa específica	quilograma por metro cúbico	Kg/m^3
Volume específico	metro cúbico por quilograma	m^3/kg
Densidade de corrente	ampère por metro quadrado	A/m^2
Campo magnético	ampère por metro	A/m
Concentração	mol por metro cúbico	mol/m^3
Luminância	candela por metro quadrado	cd/m^2
Índice de refração	o número um	1*

* Geralmente o número 1 é empregado para grandezas adimensionais

Tabela 1.3. Algumas Unidades SI Derivadas possuidoras de nomes especiais e símbolos particulares (INMETRO, 2007).

Grandeza	Unidade de Base			
	Nome	Símbolo	Expressão em outras Unidades SI	Expressão em Unidades de Base
Ângulo plano	radiano	rad		$m.m^{-1} = 1$*
Frequência	hertz	Hz		s^{-1}
Força	newton	N		$m.kg.s^{-2}$
Pressão	pascal	Pa	N/m^2	$m^{-1}.kg.s^{-2}$
Energia, Trabalho ou Quant. de Calor	joule	J	N.m	$m^2.kg.s^{-2}$
Potência, Fluxo de Energia	watt	W	J/s	$m^2.kg.s^{-3}$
Temperatura Celcius	grau Celsius**	ºC		K
Dif. Potencial Elétrico, Força eletromotriz	volt	V	W/A	$m^2.kg.s^{-3}.A^{-1}$
Resist. Elétrica	hom	Ω	V/A	$m^2.kg.s^{-3}.A^{-2}$

* Quando útil emprega-se o símbolo *rad* como unidade; ** esta unidade pode ser utilizada com os prefixos SI (tabela 1.4): mºC – miligraus Celcius.

As Unidades SI podem ser expressas em função de seu múltiplos e submúltiplos, utilizando-se dos prefixos mostrados na tabela 1.4. Estes prefixos (e respectivos símbolos) são associados aos nomes das unidades e a seus símbolos para expressar frações e múltiplos.

O quilograma é uma unidade muito especial neste sistema, pois é a única que, por razões históricas, possui um prefixo (quilo) no seu nome. Isso faz com que muitas pessoas imaginem equivocadamente que a unidade de massa do sistema internacional é o *grama*, o que não é verdade. No entanto, a formação dos nomes dos múltiplos e submúltiplos do quilograma não utilizam o prefixo "quilo". Todos os prefixos são associados apena à palavra grama. Assim, como um quilograma é uma quantidade relativa a um milhar de gramas, a quantidade 10^{-6}kg é um miligrama (1mg) e não um microquilograma.

Algumas unidades que não pertencem ao Sistema Internacional (SI) encontram-se de tal forma difundidas na sociedade humana que o consenso do CGPM admite seu uso em conjunto com a convenção do BIPM. No entanto, o uso destas unidades, em combinação com aquelas propostas pelo SI deve ser praticado em casos limitados, para que não se percam as vantagens de coerência do das unidades SI. A tabela 1.5 apresenta as mais comuns e importantes dentre as unidades fora do SI cujo uso é admitido.

Tabela 1.4 Fatores, prefixos e símbolos dos múltiplos e submúltiplos das Unidades SI (INMETRO, 2007).

Fator	**Prefixo**	**Símbolo**	**Fator**	**Prefixo**	**Símbolo**
10^{24}	yotta	Y	10^{-1}	deci	d
10^{21}	zetta	Z	10^{-2}	centi	c
10^{18}	exa	E	10^{-3}	mili	m
10^{15}	peta	P	10^{-6}	micro	µ
10^{12}	tera	T	10^{-9}	nano	n
10^{9}	giga	G	10^{-12}	pico	p
10^{6}	mega	M	10^{-15}	fento	f
10^{3}	kilo	k	10^{-18}	atto	a
10^{2}	hecto	h	10^{-21}	zepto	z
10^{1}	deca	da	10^{-24}	yocto	y

Tabela 1.5. Algumas unidades (fora do SI) que são utilizadas conjuntamente (INMETRO, 2007).

Nome	Símbolo	Valor em Unidade SI	Nome	Símbolo	Valor em Unidade SI
minuto	min	1 min = 60s	grau	º	1º = (π/180)rad
hora	h	1 h = 60 min = 3.600 s	minuto	´	1´= (1/60)º = (1/10.800)rad
dia	d	1 d = 24 h = 84.600 s	segundo	´´	1´´= (1/60)´ = (1/648000)rad
litro	L, l	1 l = 1 dm^3 = 10^{-3} m^3	atmosfera	atm	1 atm = 101.323 Pa
tonelada	t	1 t = 10^3 kg	caloria	cal	Várias medidas*
hectare	ha	1 ha = 10 hm^2 = 10^4 m^2	micron	µ	1µ = 1µm = 10^{-6} m

*Caloria dita 15ºC: 1 cal$_{15}$ = 4,1855 J (valor adotado pelo CIPM em 1950), (PV, 1950, 22, 79-80); Caloria dita IT (International Table): 1 cal$_{IT}$ = 4,1868 J (5ª Conferência Internacional sobre as Propriedades do Vapor, Londres, 1956); Caloria dita termodinâmica: 1 cal$_{th}$ = 4, 184 J

1.2 Análise dimensional

Considerando as unidades de medida utilizadas para cada uma das entidades (ou grandezas) físicas descritas, pode-se verificar que aquelas que são básicas possuem unidades também básicas e as que são denominadas derivadas, podem ser compostas por uma associação de várias unidades básicas, assim como podem resultar numa grandeza adimensional. O estudo dessas grandezas e das unidades que as compõe pode ser de extrema utilidade quando se necessita prever, verificar e solucionar equações físicas de forma a garantir sua homogeneidade e integridade.

Para exemplo prático será utilizada a equação da área das figuras planas triângulo, retângulo e do círculo da circunferência.

Caso do triângulo:	***Caso do retângulo:***	***Caso do círculo:***
$A = \frac{1}{2} \cdot altura \cdot base$	$A = 1 \cdot lado \cdot lado$	$A = 2\pi \cdot raio \cdot raio$

Em todos os casos verifica-se que a área das figuras é calculada em função de três elementos. Um deles é uma constante matemática e os outros dois são medidas de comprimento. Para entender a origem da composição da equação dimensional são empregadas duas regras básicas.

1.2.1 Regra da notação

A técnica utilizada permite que as operações algébricas sejam empregadas de modo que somente serão consideradas as unidades da mesma categoria. Na tabela 1.1 apresenta-se o que é denominado *dimensão de base* para cada uma das unidades do Sistema Internacional. Com os sete símbolos é possível analisar as dimensões de todas as equações utilizadas na física clássica.

Cada uma das grandezas físicas deverá ser definida por duas designações: o seu nome será representado por um símbolo e sua composição dimensional será representada pelo símbolo dentro de colchetes - *[ ]*. Então, no caso das áreas das figuras planas, o símbolo escolhido para sua representação será A. A equação que determina a área plana A de qualquer figura imaginada pode ser expressa pela equação 1.1.

$$A = k \cdot comprimento \cdot comprimento \tag{1.1}$$

Sabendo que a dimensão de base da grandeza *comprimento* (tabela 1.1) é representada por L, a equação 1.1 pode ser reescrita em forma de equação dimensional de acordo com a equação 1.1a.

$$[A] = [k] \cdot L^2 \tag{1.1a}$$

A constante matemática $[k]$ é adimensional[2]. Isto significa que ela não depende de nenhuma das dimensões de base definidas na tabela 1.1. O sistema utilizado neste tipo de estudo é conhecido como LMT porque usa as dimensões comprimento (L), massa (M) e tempo (T) para definir a grande maioria das unidades derivadas do SI que utilizamos nos cálculos. Assim, podemos dizer que as dimensões da grandeza *k*, neste caso sendo uma constante matemática, podem ser definidas como $\mathrm{M^0L^0T^0}$. Então, a equação 1.1a mostra que a área de uma figura plana só depende do comprimento e por isso poderia ser escrita como segue:

$$[A] = L^2M^0T^0 \tag{1.1b}$$

Para traduzir a equação 1.1b pode-se dizer que quando se tem um terreno de forma retangular, cercado por arame farpado para, por exemplo, servir de piquete para o gado e um de seus lados é dobrado de comprimento, sua área será também dobrada. Caso seja necessário aumentar ainda mais a área, poder-se-ia então, triplicar o outro lado, o que faria que a área original seja multiplicada por seis. No entanto, absolutamente nada mudaria na área se o proprietário esperar por dois anos, sem que nada mude com as dimensões dos lados, uma vez que a área é independente de tempo. Da mesma forma, por mais massa (em forma de animais, por exemplo) que se coloque ou se retire deste terreno a área também não se alterará.

---

[2] As constantes matemáticas são invariavelmente independentes de dimensão, o que não acontece com as constantes físicas que, em grande parte das vezes são dimensionais, como acontece no exemplo do oscilador harmônico simples (ver equação 1.14).

Um exemplo mais complexo poderia ser estudado com o caso da equação da velocidade. Assim, para a grandeza *velocidade*, por exemplo, pode-se definir o símbolo "v". Sua composição dimensional será, portanto [v]. Assim, no sistema internacional:

$$velocidade = v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$[v] = \frac{m}{s} \tag{1.2}$$

Observando as dimensões de base na tabela 1.1, verifica-se que a unidade usada para variação de posição (Δs) é o comprimento (m) cujo símbolo correspondente é L. Para a variação de tempo (Δt) o símbolo correspondente é T. Desta forma, a equação dimensional que representa velocidade [v] será expressa da seguinte forma:

$$[v] = \frac{m}{s} \approx \frac{L}{T} \rightarrow L \cdot T^{-1} \tag{1.3}$$

Para as grandezas relacionadas com a mecânica é prática comum agregar-se às equações a dimensão massa, representada pelo símbolo M, mesmo que ela não esteja presente na grandeza considerada. Desta forma, a equação 1.3 seria escrita da seguinte maneira:

$$[v] = \frac{m}{s} \approx \frac{L}{T} \rightarrow L \cdot M^0 \cdot T^{-1} \tag{1.4}$$

1.2.2 Regra das operações algébricas

Parte 1 – Adição e subtração

Esta regra limita as operações que serão realizadas somente às grandezas de mesma natureza, ou seja, somente será possível obter uma equação que some ou subtraia grandezas que têm entre si a mesma dimensão. Na prática, diz-se que não seria possível somar (ou subtrair) comprimento e massa, por exemplo. Pensando na equação fundamental da cinemática tem-se:

$$s_f = s_i + v_i t + \frac{at^2}{2} \tag{1.5}$$

Esta equação exprime a situação em que a posição final (s_f) de um objeto dentro de uma trajetória orientada no espaço (ou referencial newtoniano) depende de sua posição no início (s_i) da observação, da velocidade neste mesmo instante (v_i) e da aceleração (a) mantida constante, ambas durante um tempo (t). Se s_f é uma posição dentro de uma trajetória orientada, sua dimensão tem características de comprimento e, portanto, o seu símbolo de dimensão de base é L. Isto implica em dizer, segundo a regra das operações algébricas, que os três termos do segundo membro da equação devem possuir também, como resultado de suas inter-relações, a dimensão de base L. Está claro que s_i por ser uma posição também tem dimensão L. Conferindo tal afirmação para os demais componentes pode-se concluir o seguinte:

$$[v_i t] = \frac{m}{s} t \approx \frac{L}{T} \cdot T = L \cdot T^{-1} \cdot T = \boxed{L}$$

$$\left[\frac{at^2}{2}\right] = \frac{\frac{m}{s^2}t^2}{2} = \frac{mt^2}{2s^2} = \frac{ms^{-2}t^2}{2} \approx \frac{L \cdot T^{-2} \cdot T^2}{1} = \boxed{L}$$

Nota-se, pois, que a equação é dimensionalmente *homogênea*, pois todos os termos do segundo membro possuem a mesma dimensão do primeiro membro, ou seja, $L.M^0.T^0$.

Parte 2 – Multiplicação e divisão

Neste caso, a multiplicação ou a divisão de duas grandezas com quaisquer dimensões resultará em outra grandeza, cujas dimensões serão a combinação das dimensões individuais das grandezas originais, respeitando-se as regras da potenciação das operações matemáticas. Estas condições são essenciais para que se determine as dimensões de um dos membros de uma equação qualquer. Supondo que, por exemplo, seja necessário determinar as dimensões da variável cujo símbolo é "a" que compõe o terceiro termo do segundo membro da equação 1.5. Trata-se esta questão da forma descrita a seguir.

- ✓ Sabe-se de antemão que o primeiro membro da equação é composto por um termo de dimensão L;
- ✓ O termo em questão (que contém a variável a) deverá ter a dimensão L e um de seus componentes é adimensional, portanto, como visto anteriormente:

$$\left[\frac{at^2}{2}\right] = \frac{[a][t^2]}{[2]} \approx \frac{[a][t^2]}{[1]} \approx [a][t^2] = L \tag{1.6}$$

Conforme estabelecido pela *parte 2* da regra das operações algébricas, trata-se uma igualdade como uma equação matemática, observando suas regras básicas, assim a equação 1.6 pode ser escrita como segue.

$$[a][t^2] = L \; ou \; [a] = \frac{L}{[t^2]} \approx \frac{L}{T^2} \; ou \; \boxed{[a] = L \cdot T^{-2}} \tag{1.7}$$

Nota-se que as dimensões da variável *a* em questão, correspondente à grandeza *aceleração*, são coerentes com sua composição usual que é expressa em m/s^2 e, portanto, pode ser verificada com eficiência.

1.2.3 Teorema de Bridgman

O teorema de Bridgman (SRIVASTAVA et al., 2006) diz que se, empiricamente, for constatado que uma grandeza física G depende das grandezas g_1, g_2, g_3 ... e g_n, independentes entre si, então a grandeza derivada G pode ser escrita da seguinte forma:

$$G = k \cdot g_1^{\alpha} \cdot g_2^{\beta} \cdot g_3^{\gamma} \dots \cdot g_n^{\omega} \tag{1.8}$$

Sabendo disso, é possível construir um raciocínio que permita determinar qual seria a equação que descreve o comportamento de um fenômeno físico.

Para entender como esse teorema pode ajudar na solução de problemas, pode-se utilizar o fenômeno representado na figura 1.1, que retrata um sistema massa-mola que realiza um movimento harmônico simples[3] e deduzir qual é a equação que o representa matematicamente, com o emprego de análise dimensional. Se o deslocamento considerado é x, a intensidade da força F será:

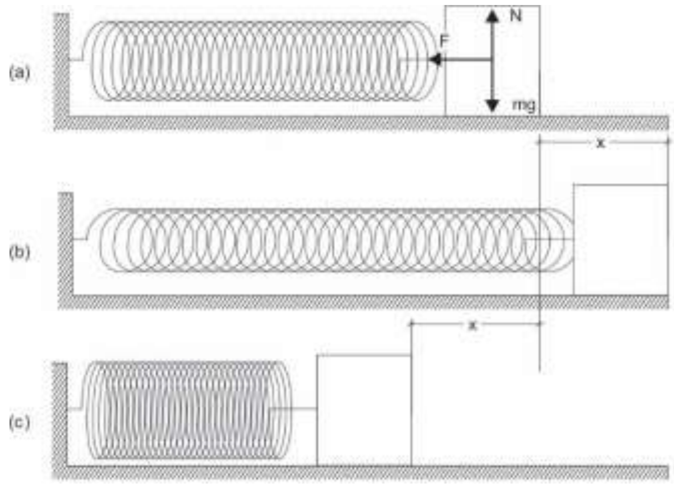


Figura 1.1 Sistema massa-mola.

$$F = -k \cdot x \tag{1.9}$$

A força restauradora, pelas suas características, está sempre orientada em sentido contrário ao vetor deslocamento. Por este motivo utiliza-se o sinal *negativo* na equação 1.9. Na figura 1.1 o oscilador harmônico simples possui um corpo de massa m preso à uma mola, de massa desprezível, ambos apoiados sobre um plano horizontal isento de atrito. Em 1.1a, a mola está em sua posição de equilíbrio e, portanto, ainda indeformada. Em 1.1b o corpo foi deslocado de x unidades de comprimento, de modo a permitir seu alongamento máximo[4]. Ao abandonar o sistema inicia-se uma oscilação de amplitude igual ao deslocamento inicial, sendo que a massa m se desloca até o extremo oposto ao alongamento inicial (figura 1.1c).

Supondo uma posição x qualquer e isolando o corpo em questão, verifica-se que as forças que agem sobre ele são seu peso (mg), a reação normal do apoio (N) e a força restauradora (F). No plano vertical o corpo encontra-se em equilíbrio, pois seu peso e a reação do apoio se equivalem. No plano horizontal, como não ocorre atrito, conclui-se que a força restauradora F que a mola exerce sobre o corpo possui uma componente F' exercida pelo corpo sobre a mola, cuja intensidade é $k.x$.

Estudando dimensionalmente a equação 1.9 pode-se determinar o *período* de oscilação do sistema, em qualquer condição de k, x e m. Estabelecendo que *período* é o tempo t para que ocorra uma oscilação completa, torna-se necessário determinar qual a relação entre as variáveis componentes da equação 1.9 com o tempo. Sabe-se, com base na segunda lei de Newton que:

$$F = m \cdot a \tag{1.10}$$

As equações dimensionais de (1.9) e (1.10) são mostradas, respectivamente pelas equações 1.11 e 1.12.

$$F = [k] \cdot L \tag{1.11}$$

[3] É um movimento vibratório em que a partícula se encontra sob a ação de uma força, sempre orientada para a posição de equilíbrio, de módulo proporcional ao deslocamento. Este tipo de força recebe o nome particular de *força restauradora* (GONÇALVES, 1965).

[4] Todos os raciocínios a este respeito consideram que os limites de elasticidade do material de que a mola é composta estão perfeitamente conservados.

$$F = M \cdot \frac{L}{T^2} = M \cdot L \cdot T^{-2} \tag{1.12}$$

Substituindo 1.12 em 1.11, estabelece-se a condição de homogeneidade e tem-se que:

$$M \cdot L \cdot T^{-2} = [k] \cdot L \tag{1.13}$$

Rearranjando 1.13 revelam-se as dimensões de k.

$$[k] = M \cdot T^{-2} \tag{1.14}$$

Assim, isolando-se T, determina-se a equação dimensional do *período* (que representa o tempo de uma oscilação) no MHS.

$$T^{-2} = \frac{[k]}{M} \quad \rightarrow \quad T^2 = \frac{M}{[k]} \quad \rightarrow \quad T = \sqrt{\frac{M}{[k]}} \tag{1.14a}$$

Retornado-se da equação dimensional 1.14a para a equação matemática correspondente, sendo *m* a massa do corpo e *k* a constante da mola, tem-se que o período do mhs será:

$$T = c \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \tag{1.15}$$

Na equação 1.15 a variável c é uma constante (ver equação 1.8) e é possível demonstrar analiticamente ou em experimentos de laboratório que seu valor é 2π.

Outra utilidade prática das equações dimensionais é a determinação dos expoentes das variáveis utilizadas nas equações matemáticas que representam os fenômenos físicos. Por exemplo, sabe-se que num movimento circular uniforme a força (F), resultante, que desloca um ponto material em direção ao centro da circunferência descrita pela trajetória depende da sua massa (m) e velocidade linear (v), assim como do raio (r) da trajetória. Assim, de acordo com o teorema de Bridgman:

$$F = k \cdot m^{\alpha} \cdot v^{\beta} . r^{\gamma} \tag{1.16}$$

Substituindo-se os símbolos usados na equação 1.16 pelos símbolos de dimensão de base (tabela 1.1) e observando a condição de homogeneidade das equações dimensionais, tem-se:

$$LMT^{-2} = M^{\alpha} (LT^{-1})^{\beta}\, L^{\gamma} \tag{1.17}$$

Desenvolvendo e rearranjando a equação 1.17 tem-se que:

$$LMT^{-2} = M^{\alpha} L^{\beta+\gamma}\, T^{-\beta}$$

Observando a equação 1.17, conclui-se, sobre os expoentes das dimensões base que:

$$1 = \beta + \gamma$$

$$1 = \alpha$$

$$-2 = -\beta$$

Assim, conclui-se que a equação 1.16 tomará a seguinte forma, esclarecendo de antemão que o valor de k, neste caso, é unitário:

$$F = k \cdot \frac{mv^2}{r} \tag{1.18}$$

1.3 Medidas, medições e erros

Para se conhecer o tamanho de uma grandeza é necessário um procedimento denominado *medição*, que consiste em comparar a quantidade de que se dispõe com um padrão previamente definido. Portanto, para quantificar uma grandeza qualquer são necessários instrumentos, desde os mais rudimentares como uma régua até coisas tão precisar quanto o *LIGO* (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory[5]), considerado o instrumento mais preciso do mundo. No entanto, a origem e a qualidade dos instrumentos que utilizamos no dia a dia confere a eles capacidade duvidosa de obter medidas precisas. Além do mais, a exigência de quem realiza a medida é fundamental para que se qualifique a observação e se dê crédito a ela.

Como a medição de uma grandeza se dá por ações comparativas, dela resultam em *valores numéricos* que são múltiplos ou submúltiplos de uma *unidade*. Fica claro, portanto, que a unidade como base de comparação (ou seus múltiplos e frações) possui a mesma natureza da grandeza que está sendo medida. Chama-se de *padrão* a referência que se usa para realizar medições.

O valor numérico (N) obtido em qualquer medição está relacionado à grandeza (G) e à unidade (U) e pode ser definido pela equação 1.19.

$$N = \frac{G}{U} \quad ou \quad G = NU \tag{1.19}$$

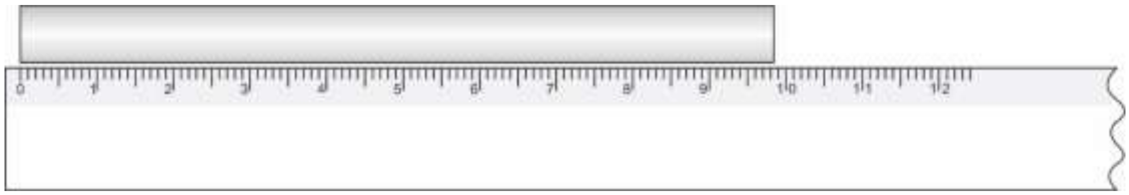
Observando as variáveis utilizadas na equação 1.19, conclui-se que uma grandeza somente será quantificada se a ela forem atribuídas um valor numérico acompanhado de uma unidade de medida. Por exemplo, $2kg$, $25s$, $32{,}7m$.

No entanto, ao realizar qualquer tipo de medição, todos estão sujeitos a cometer *erros*. Pode-se definir erro de medição como *a discrepância entre o valor da medida obtida e o real valor da grandeza, ou seja, seu valor verdadeiro*. Esta definição encontra uma enorme dificuldade que é *conhecer* o "real valor da grandeza".

A figura 1.2 mostra um exemplo de uma régua, graduada em milímetros sendo utilizada para medir uma determinada peça. A figura mostra que é possível medir com certeza o valor de nove centímetros e oito milímetros (ou noventa e oito milímetros). Como se nota, no entanto, o comprimento da peça ultrapassa

[5] Ver detalhes em LIGO Caltech. 2016. Disponível em: https://www.ligo.caltech.edu/. Acesso em 03/04/2016.

este valor e fica entre ele e o nonagésimo nono milímetro. Com um pouco de atenção nota-se que o comprimento não atinge a metade do milímetro seguinte. Portanto, poder-se-ia creditar à medida, por exemplo, mais quatro décimos de milímetro, resultando em 98,4mm.



1.2. Régua graduada em milímetros utilizada para medir uma peça.

É fácil de entender, pois, que a medida quantificada desta forma tem um grau de incerteza na última casa decimal, mesmo assumindo que o operador (quem usa o instrumento para realizar a medição) é suficiente hábil e isento de interesse no maior ou menor comprimento da peça. Desta forma, seu trabalho que seria obter a *real dimensão da peça*, fica duvidoso em função da precisão do equipamento.

Assim, admite-se uma situação de *incerteza* no resultado da medição e tenta-se determinar (ou estimar) *o possível valor que pode ser assumido para um erro de medição*. Com esta técnica a medida obtida passa a ser *um intervalo* e não um valor. No caso do exemplo da figura 1.2, o intervalo que representa o comprimento *c* da peça seria assumido como algum valor entre 98 e 99 milímetros (98mm ≤ c ≤ 99mm) e pode-se dizer que 1mm é a *precisão do equipamento*. A *incerteza* desta medida seria igual à metade da precisão, ou seja, para o caso em questão igual a 0,5mm.

Refletindo mais uma vez sobre o caso da figura 1.2, pode-se inferir que existem inúmeras situações que podem interferir nas medidas, independentemente da qualidade ou precisão do instrumento. Por exemplo, a dilatação térmica da régua ou uma distração qualquer do operador (como colocar o zero do instrumento em desacordo com o início da peça) podem produzir leituras com *erros*. Os erros cometidos na avaliação quantitativa das grandezas, portanto, podem ter diversas origens e são classificados basicamente em três tipos: acidentais ou aleatórios, grosseiros e sistemáticos (CABRAL, 2004).

1.3.1 Erros acidentais ou aleatórios

A definição de acidente no dicionário Michaelis[6] é: *o que é casual, fortuito, imprevisto*. Assim, os erros de medição acidentais não podem ser previstos. Sua designação pode levar a engano da interpretação, podendo o leitor concluir que se relaciona a um desleixo qualquer ou desatenção do observador. No entanto, sua origem está na variabilidade natural dos fenômenos físicos o que leva a pequenas variações nas condições ambientais[7], as quais resultam em diferenças entre as medidas. Tais variações e diferenças (mostradas no exemplo da figura 1.3a) podem ser tratadas com metodologia estatística.

---

[6] MICHAELIS. Dicionário de português online. 2016. Disponível em http://michaelis.uol.com.br/moderno/portugues/index.php?lingua= portugues-portugues&palavra=acidente. Acesso em 14 fev. 2016.

[7] Neste caso, *ambiental* é um termo que designa as condições globais em que ocorre a medição e não somente a situações relacionadas ao clima como temperatura e umidade, por exemplo.

Erros grosseiros

Os erros grosseiros (representados na figura 1.3b) poderiam, de certa forma, ser inseridos naqueles chamados erros acidentais. No entanto, são caracterizados separadamente, pois ocorrem devido a fatores que, na grande maioria dos casos, são perfeitamente evitáveis. Frequentemente são resultado de erros de cálculo ou de leitura. Quando são erros de leitura decorrem quase sempre da inabilidade do observador, mas podem ser oriundos de características de instrumentos como, por exemplo, posicionamento deficiente de uma trena para medição de uma distância o posicionamento inadequado do observador em relação à escala de um aparelho (conhecido como *erro de paralaxe*) causando uma leitura irreal, determinada pela posição de visada.

Erros sistemáticos

A principal característica do erro sistemático é levar ao "acúmulo" de medidas sempre no mesmo sentido (figura 1.3c). Podem ser de origem metodológica, de observação ou de instrumentação. Exemplos típicos desses casos seriam medições realizadas em condições ambientais diferentes daquelas em que o aparelho foi calibrado, disparo de um sensor por um operador (um cronômetro, por exemplo), posicionamento incorreto do "zero" de escala, ou deficiências de visão do observador, dentre outros.

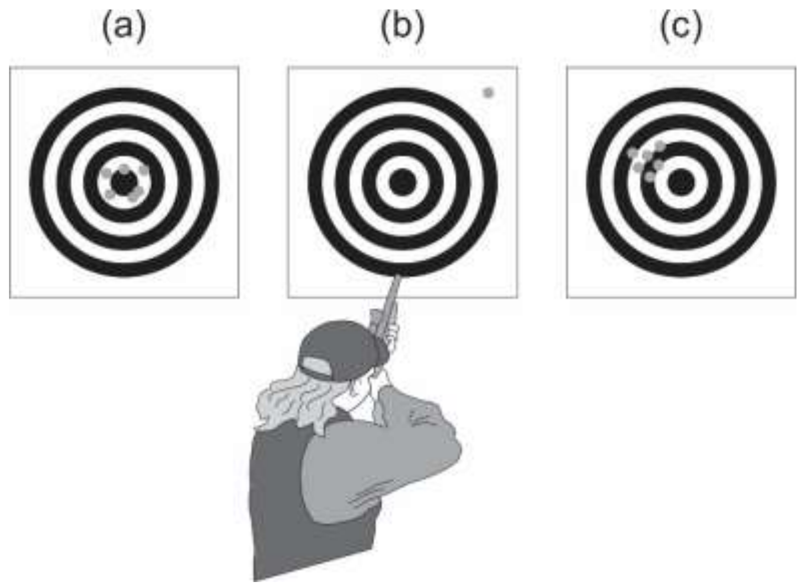


Figura 1.3 Erros no tiro ao alvo e sua analogia com os erros de medição: (a) aleatórios; (b) grosseiros; (c) sistemáticos.

1.3.2 Erro absoluto e relativo

Por mais cuidadoso e treinado que seja um observador, por melhor que seja seu instrumento e a manutenção que é dada a ele, sempre ocorrerão erros de medição. Para que se possa estabelecer uma forma de estimar o erro cometido no processo de obtenção de valores acerca de qualquer grandeza, deve-se entender o conceito de *valor verdadeiro (ou real)* dessa grandeza. O valor verdadeiro de uma grandeza qualquer somente seria obtido com uma *medição ideal*, o que significa imaginar possível, num determinado momento, todas as condições existentes como ideais: o ambiente, o operador, o instrumento de medida e todas as outras variáveis que influenciam a medição. Tal valor pode ser considerado utópico e o mais sensato é admitir que ele é impossível de ser obtido, a não ser por mero acaso, resultando numa medida que será também impossível de se reconhecer como a medição ideal.

A teoria que cuida do assunto "valores das medidas" ou "precisão das medições", por sua vez, baseia-se numa série de *pós-resultados* (GOLÇALVES, 1965) e foi estabelecida por Gauss[8]. A teoria indica que aquilo que se admite como correto acerca de uma medida é o *valor mais provável* de uma grandeza e define-se como:

---

[8] Carl Friedrich Gauss (1777- 1855) – matemático, físico e astrônomo alemão.

O valor mais provável de uma grandeza, medida diversas vezes, é a média aritmética das medidas encontradas, desde que estas mereçam a mesma confiança entre si.

Um experimento interessante que pode ser feito para comprovar tal informação seria colocar uma determinada quantidade de pequenos objetos (podem ser balas ou confeitos ou ainda bolas de gude) dentro de um recipiente relativamente grande e transparente. Tal quantidade só é conhecida pela pessoa que os colocou no recipiente. Em seguida, solicita-se a um número considerável de pessoas que tentem descobrir qual o número exato dos objetos estariam ali. Depois de várias "opiniões" determina-se a média aritmética dos palpites e chega-se, quase sempre, num número muito próximo do real.

Os erros que se cometem ao realizar medições podem ser classificados como erro *absoluto* e erro *relativo.* Absoluto é o valor obtido da diferença entre o valor da medida e o valor verdadeiro da grandeza. Como foi explicado, não se pode obter o valor verdadeiro. Então, utiliza-se do conceito de valor mais provável da grandeza. Neste caso o erro absoluto passa a ser conhecido como *erro aparente* (a). Assim, o erro aparente é a diferença entre o valor encontrado para cada uma das medições (x_i) e o valor mais provável da grandeza ($\bar{x}$, que também pode ser entendido como o valor da média aritmética das medidas - M), que é a média aritmética dos n valores obtidos das medições realizadas. Assim:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = M \tag{1.20}$$

$$a = \bar{x} - x_i \tag{1.21}$$

A inversão dos termos do segundo membro da equação 1.21 dá origem a um outro indicador denominado *desvio da média* (d) que indica quanto cada medida foi diferente do valor mais provável da grandeza.

$$d_i = x_i - \bar{x} \tag{1.22}$$

As equações 1.21 e 1.22, mostram que, tanto o erro aparente (*absoluto*) como o desvio da média, podem ser negativos ou positivos, o que num conjunto de medições, resulta em uma "dispersão" de valores em torno da média. Como se pode notar o módulo do erro aparente $|a|$ é igual ao módulo do desvio da média $|d_i|$.

O erro relativo (r), por sua vez, é um valor que pode ser expresso em decimais ou percentagem e significa quanto uma medida difere da média ($\bar{x}$ ou M), proporcionalmente. Ou seja, é a razão entre o erro aparente e o valor mais provável da grandeza. Sua determinação se dá pela equação 1.23.

$$r = \left|\frac{a}{M}\right| \cdot 100 \tag{1.23}$$

A importância do erro relativo é grande pois ele está relacionado com a precisão da medida. Sua determinação qualifica a operação de medição. Como exemplo, pode-se imaginar que numa amostragem de campo, foi encontrada uma diferença a menor de 0,1kg num saco de arroz vendido num supermercado, em cuja embalagem estava indicado o total de 5kg do cereal. Na mesma loja e para a mesma marca de arroz, quando a embalagem indicava 2kg, a diferença a menor foi de 0,07kg. Em ambos os casos, se a quantidade média de arroz indicada nas embalagens fosse admitida como o valor mais provável, tais diferenças poderiam ser consideradas erros aparentes. No entanto, quando se determina os valores dos erros relativos, a embalagem de 5kg apresenta um erro de 2% enquanto que a embalagem de 2kg apresenta erro de 3,5%.

1.3.3 Tratamento estatístico para erros de medida

Desvio médio

O desvio médio é um indicativo da qualidade das medições e está intimamente relacionado com os instrumentos utilizados no trabalho. A equação 1.24 mostra a definição do *desvio médio* ($\bar{d}$) de um número n de leituras que é a média aritmética dos valores absolutos dos desvios da média.

$$\bar{d} = \frac{|d_1| + |d_2| + |d_3| + \cdots + |d_n|}{n} = \frac{\sum_{i=0}^{n} |d_i|}{n} \tag{1.24}$$

Desvio padrão

O desvio padrão (σ) de um conjunto finito de dados é determinado pela equação 1.25. Tal valor tem a mesma dimensão dos dados e representa a sua dispersão em torno da média o que significa que baixos valores relativos indicam que há grande probabilidade das leituras se aproximarem da média. A medida relativa entre desvio padrão e média recebe o nome de *coeficiente de variação* (cv) que é calculado pela equação 1.26.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{n} d_i^2}{n-1}} \tag{1.25}$$

$$cv = \frac{\sigma}{\bar{x}} \tag{1.26}$$

A tabela 1.6 mostra resultados simulados de 60 observações e suas respectivas medidas para uma investigação sobre compactação de solo por penetrometria, em que se buscou determinar a umidade com base em peso seco. A massa de solo foi amostrada com o método do anel volumétrico. Os resultados permitem calcular os parâmetros descritos pelas equações de 1.21 a 1.26.

Tabela 1.6. Valores de umidade do solo (% peso seco) obtidos numa investigação de resistência à penetração do cone e sua respectiva análise estatística. Adaptado de Molina et al (2013).

23,411	27,553	25,901	24,748	27,070	26,564	25,941	26,181	24,775	23,022
27,297	26,399	26,237	24,943	26,760	26,623	25,990	25,678	26,144	29,307
26,775	25,765	25,685	28,474	23,208	26,913	25,534	26,018	24,719	25,845
26,064	24,843	26,866	24,943	26,555	25,783	26,040	25,762	26,741	25,871
27,511	26,462	26,747	27,474	26,646	25,768	25,758	25,727	25,292	26,005
27,985	25,973	25,651	29,933	26,555	26,217	25,470	27,140	26,063	24,183
Média - 26,125		Desvio Médio - 0,858			Desvio Padrão - 1,231		Coeficiente de Variação - 4,712%		

Nos casos de medição, os valores calculados acerca uma coleção de dados com o objetivo de qualificá-los (como médias e seus desvios) visam estimar a incerteza associada ao resultado final da prática que pretende estimar o valor mais provável da grandeza. Para tornar tais cálculos significativos, no entanto, o número de valores a ser estudados não deve ser pequeno e os erros sistemáticos necessitam ser muito menores que os aleatórios.

Na prática percebe-se que a dispersão de medidas (ou observações), geralmente, concentra-se próxima da média. As ocorrências de valores muito diferentes da média ocorrem em frequência baixa quando se tem um sistema de medições adequado. A forma como este fenômeno ocorre, isto é, a distribuição verificada das leituras realizadas em uma medição em torno da média aritmética é conhecida como *distribuição de probabilidades*.

Distribuição normal

Dá-se o nome de distribuição normal ou curva de Gauss a um modelo matemático que descreve o comportamento de vários fenômenos aleatórios (BITTENCOURT & VIALI, 2016). As observações e medidas para quantificação de eventos físicos e atividades de engenharia são eventos aleatórios e os erros podem ser tratados segundo tal metodologia. A teoria afirma que os valores das medidas, quando pertencem à categoria não-determinística, são contínuos e distribuem-se de forma normal, podem ser estudados pela chamada *curva de Gauss*. Exemplo típico deste fato é retratado na figura 1.4, que mostra o resultado do estudo da média diária da precipitação pluviométrica observada (em milímetros), para o mês de janeiro, no município de Piracicaba (SP), entre 1917 e 2016. Os valores originais que deram origem à curva podem ser encontrados na tabela A1 do apêndice.

A função que permite construir a curva de distribuição normal é dada pela equação 1.27. Quando a distribuição é normal, a área sobre a curva detém 100% dos valores das medidas obtidas, sendo que a maioria delas se concentra em torno da média.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\left[\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}\right]} \tag{1.27}$$

O gráfico à direita, na figura 1.4, mostra a probabilidade de se encontrar uma medida sob a curva, em função do desvio padrão ($-n\sigma < \bar{x} < n\sigma$). A teoria mostra que à medida que ocorre o afastamento, devido ao acúmulo de valores, cada vez fica mais provável de se encontrar um valor (x_i) e de acordo com as áreas sombreadas esta probabilidade está assim distribuída:

$-\sigma < x_i < \sigma$ – 68,26% $-2\sigma < x_i < 2\sigma$ – 95,45% $-3\sigma < x_i < 3\sigma$ – 99,73%

O regime de chuvas representado na figura 1.4 tem as seguintes características:

Média Diária – 7,50mm *Máximo Diário – 103,2mm* *Acumulado mensal mínimo – 60,8mm*

Desvio Padrão – 13,04 *Mínimo Diário – 0,00 mm* *Acumulado mensal máximo – 490, 9mm*

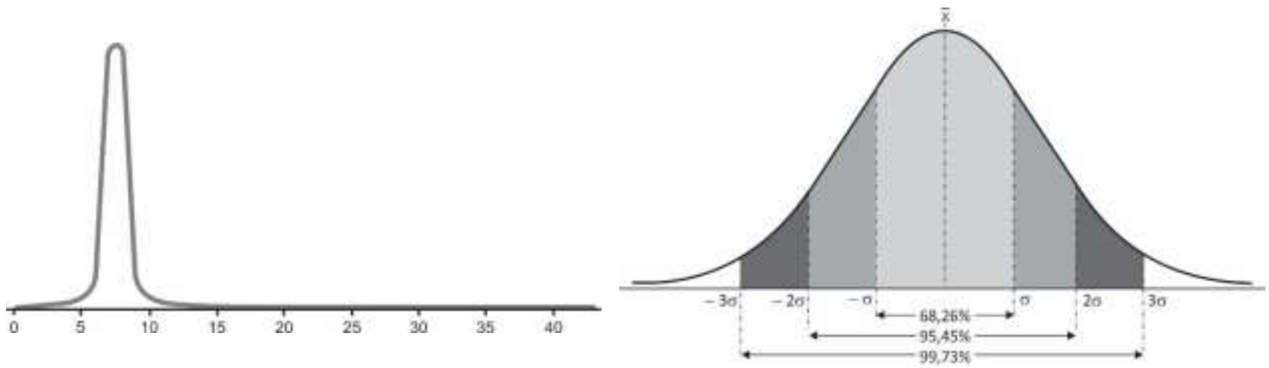


Figura 1.4. Esquerda – Distribuição do regime de chuvas diário no mês de janeiro (em mm), entre 1917 e 2016, para o município de Piracicaba (SP). Direita – Curva teórica de distribuição normal e limites de probabilidade em função do desvio padrão.

Estas probabilidades estão distribuídas de forma simétrica em torno da média e as tabelas A2 e A3 do apêndice mostram seus valores de acordo com a função z que é denominada *padrão normal*. Com base no padrão normal pode-se reduzir qualquer função e determinar a probabilidade acumulada de ocorrência de uma dada observação de valor x_i, mediante a transformação da equação 1.28.

$$z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma} \tag{1.28}$$

Utilizando a distribuição de chuvas mostrada na figura 1.4 como exemplo e a tabela A3 para valores positivos de z pode-se calcular qual é a probabilidade de, no mês de janeiro em Piracicaba, chover num único dia até 25mm. Com base na equação 1.28 o valor de z será:

$$z = \frac{25 - 7{,}50}{13{,}04} = 1{,}34$$

Usando a tabela A3, procura-se na coluna da esquerda o valor 1,3 e na primeira linha o valor 0,04 que corresponde à casa centesimal do valor obtido pela equação 1.28, resultando em 0,90988. Este número representa a área sob a curva normal que se encontra à esquerda do valor de z e, portanto, a probabilidade de chover até 25mm em um dia no mês de janeiro no município de Piracicaba. Ou seja, procura-se a área que representa a probabilidade de $z < 1{,}34$. Assim, encontra-se o valor de 90,98% de probabilidade de chuva até 25mm. Por exclusão conclui-se que será de 9,02% a probabilidade de chover mais de 25mm num único dia, durante o mês de janeiro, em Piracicaba –SP.

A dúvida quanto à possibilidade de chuva, no entanto, poderia ser dentro de uma determinada faixa, ou seja, qual seria a possibilidade de chover entre 12 e 25mm, por exemplo. O procedimento seria o mesmo, porém o resultado seria obtido da diferença entre as duas áreas, conforme exemplificado na figura 1.4. Sabendo que o valor de z para chuva de até 12mm seria 0,3451, a tabela A3 fornece o valor de 0,63307 ou 63,31%. A área hachurada representa a probabilidade de chuvas até 25mm e a área preenchida com a cor cinza a probabilidade de chuvas até 12mm. Portanto, a área hachurada de fundo branco representa a diferença entre as duas áreas maiores o que significa que a probabilidade de ocorrerem chuvas entre 12 e 25mm é de 27,68%.

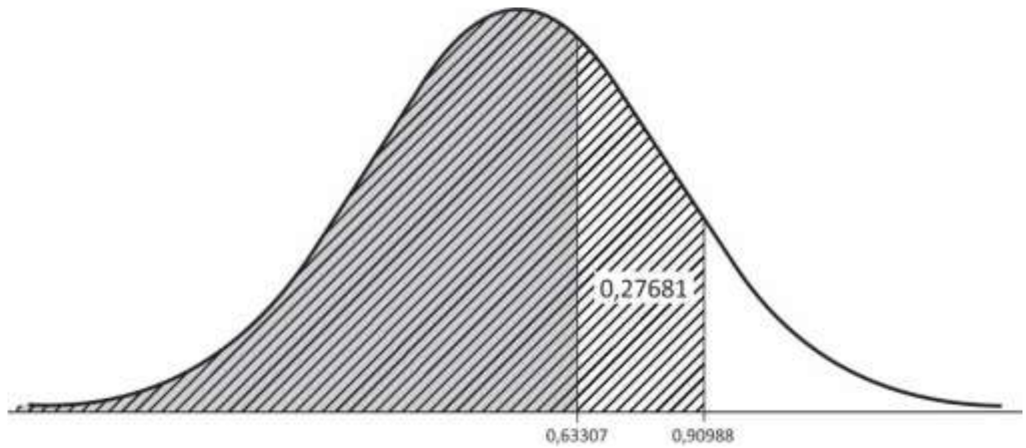


Figura 1.4. Representação esquemática da probabilidade de chuvas diárias entre 12 e 25mm, no mês de janeiro, em Piracicaba (SP).

1.4. Erros de arredondamento

Como visto, os erros de medição podem ser creditados aos instrumentos utilizados, à inabilidade do operador e até ao acaso. Existem outras causas de ocorrência de erros e não se pode desprezar ou esquecer das suposições ou simplificações impostas a modelos físicos e matemáticos como assumir que não existe atrito, perda de calor, que cabos são inextensíveis, etc. No entanto, existe outra possibilidade de se introduzir erros em cálculos e determinações devido à forma como os algarismos utilizados para representar quantidades dentro de seus sistemas numéricos são representados e tratados. Este fator toma especial importância quando se utiliza equipamentos de processamento eletrônico que tem forçosamente que fazer a tradução dos números que são naturalmente usados pelos humanos para a linguagem binária correspondente à alternância entre alta e baixa tensão utilizadas pelos processadores digitais.

1.4.1 Algarismos significativos ou dígitos de precisão

O conceito de *dígitos de precisão ou algarismos significativos* está intimamente relacionado com a teoria dos erros e poderia ser definido como *os algarismos pertencentes a uma representação numérica, dos quais se tem certeza, acompanhados de seu primeiro algarismo duvidoso, a contar do primeiro algarismo zero que representa a nulidade – o chamado "zero à esquerda".* Por exemplo, se uma balança analítica de um laboratório mediu uma quantidade correspondente a 2,5043g de uma substância qualquer e sua capacidade de medição tem um erro de 1mg (0,001g), pode-se dizer que não há certeza do valor da terceira casa decimal na medida obtida. Como não se conhece o sinal do erro cometido pelo equipamento, o valor da massa medida poderia ser 2,505g se ele fosse positivo ou 2,503g se ele fosse negativo. Desta forma, não há motivo para se exprimir o algarismo "3" no registro e poder-se-ia exprimir o valor obtido da seguinte forma:

$$2{,}504 \pm 0{,}001\text{g}$$

No entanto, existem casos em que o erro de medida não é expresso. Por exemplo, ao consultar a distância entre São Paulo e Belo Horizonte num site de mapas da internet, a informação é de que o centro das cidades estão a 585km entre si. Ou então, quando se procura saber qual é a potência máxima do motor de um trator agrícola, o seu catálogo comercial indica o valor de 81kW. Nestes casos, fica implícito que o último algarismo de cada um destes números seria duvidoso e o erro admitido é de uma unidade de medida na casa incerta. Assim, a distância entre as cidades poderia variar entre 584 e 586km e a potência do motor em questão estaria entre 80 e 82kW. Ou seja, a notação para estes casos poderia ser respectivamente:

$$585 \pm 1\text{km} \quad \text{e} \quad 81 \pm 1\text{kW}$$

É interessante notar que, em se tratando da teoria dos erros, a notação 585km é diferente de 585,0km. No segundo caso o erro a que se está sujeito é de 0,1km. Tais notações poderiam influenciar na percepção de seus erros relativos: 585,0km é um valor cerca de dez vezes mais preciso que 585km.

Pelo conceito de algarismos significativos, portanto, pode-se dizer que 585km tem três algarismos significativos e que 585,0km tem quatro significativos. Outros exemplos de algarismos significativos seriam:

26,34m – quatro significativos	1,03 – três significativos
0,051 – dois significativos	15967 – cinco significativos

Ocorre que muitas das vezes é necessário fazer transformação de unidades e este procedimento poderá gerar dúvidas quanto ao número de algarismos significativos de uma dada medida. Por exemplo, se no caso da potência do motor do trator citado anteriormente for necessária a transformação de quilowatts para watts, teremos os seguintes valores:

$$81\text{kW} = 81.000\text{W}$$

Aparentemente, o que se julgava possuir dois algarismos significativos passou a ter cinco algarismos significativos. No entanto, a incerteza desse valor estava implícita na casa de 1kW ou de 1.000W. A expressão do valor transformado para watts, no entanto, deve manter dois algarismos significativos e, portanto, sua notação deverá ser:

$$81\text{kW} = 81 \cdot 10^3\text{W}$$

Este exemplo é útil para esclarecer o uso do algarismo zero e suas relações com os algarismos significativos. Sua posição relativa entre os algarismos que compõe um valor qualquer pode ser definida por três situações particulares. A primeira delas (caso 1) é quando antes da vírgula (portanto na parte inteira) existe pelo menos um algarismo diferente de zero à sua esquerda. As outras duas dizem respeito à situação em que o valor representa uma fração (e portanto, sua parte inteira é nula). Em tal situação o zero pode estar entre a virgula e o primeiro algarismo diferente de zero (caso 2) ou após o primeiro algarismo diferente de zero (caso 3). A seguir relaciona-se exemplos para os três casos.

	Valor da Medida	**Algarismos Significativos**	**Casa Decimal de Incerteza**
Caso 1	20,2	3	décimo
Caso 1	34,051	5	milésimo
Caso 1	2,00	3	centésimo
Caso 2	0,073	2	milésimo
Caso 3	0,108	3	milésimo
Caso 3	0,03050	4	centésimo de milésimo

1.4.2 Representação numérica de ponto fixo e ponto flutuante

As representações numéricas de ponto fixo utilizadas na prática cotidiana oferecem enormes vantagens aos cálculos necessários para resolver problemas corriqueiros e são suficientes para tornar seus resultados aceitáveis às exigências humanas. No entanto quando se trata de atividades científicas e de necessidades técnicas de grande precisão, cujos cálculos numéricos são realizados em equipamentos eletrônicos, as exigências são outras e suas características serão alvo de texto específico. Ao que se destina este texto, as considerações a seguir serão plenamente suficientes.

Chama-se *representação numérica de ponto fixo* aquela em que há necessidade de expressar uma fração e para tal o valor é expresso em sua natureza integral sendo uma parte relativa à quantidade "inteira" da medida e a outra referente à sua quantidade "fracionária". Este procedimento é corriqueiro no sistema decimal e o exemplo utilizado anteriormente para a massa obtida na balança analítica do laboratório o representa perfeitamente. O valor diz que foram encontradas duas unidades inteiras e quinhentos e quatro centésimos de gramas na medida.

Apesar disso, os registros de ponto fixo possuem a desvantagem de representar números distintos com precisão diferente (PILLING, 2016). Assim, valores como $453,\overline{721}$ e $0,018\overline{24}$, que possuem seis algarismos, serão expressos em base 10 com três algarismos para a parte inteira e 3 para a parte fracionária da seguinte forma: 453,721 e 0,018. Ocorre que no caso do número de maior valor absoluto tem-se um maior número de algarismos que o representa, tornando sua expressão mais precisa de que o número de menor valor absoluto. Este fato desencadeia a necessidade de uma notação que torne o processo mais preciso e que motiva o aparecimento do método do ponto flutuante.

Segundo PILLING (2016) a representação de um número x, real, na base b ($b \in \mathbb{N}$) será denominada *de ponto flutuante normalizado* de forem satisfeitas as seguintes condições:

$x = mb^e$, em que 1.29

- ✓ $m = \pm\, 0,d_1d_2.....d_n$ $n \in \mathbb{N};$
- ✓ $1 \le d_1 \le b-1$ e $1 \le d_i \le b-1$ para i = 2, 3, ... n
- ✓ $e_1 \le \varepsilon \le e_2$ em que ε, e_1, $e_2 \in \mathbb{Z}$

Na composição desse número x, os termos m, ε e n recebem as seguintes designações:

- ✓ m – significado, coeficiente ou mantissa;
- ✓ ε – expoente e
- ✓ n – número de dígitos de precisão.

Dentro dos exemplos utilizados anteriormente e satisfazendo as condições necessárias ao *sistema de ponto flutuante* os números $453,\overline{721}$ e $0,018\overline{24}$ seriam representados na base 10 com seis algarismos de precisão da seguinte forma:

$$0,453721 \cdot 10^3 \quad \text{e} \quad 0,182424 \cdot 10^{-1}$$

Nota-se que o número sempre será uma fração (iniciando com *zero e vírgula*) e o primeiro algarismo após a vírgula será diferente de zero. Este conjunto genérico de números do sistema de ponto flutuante é representado pelo conjunto $F(b, n, e_1, e_2)$. Por exemplo, o conjunto dos números de base 10, com dois dígitos de precisão entre os expoentes -10 e +10, seria genericamente representado por F(10, 2, -10, 10) e seus elementos começariam por $0{,}10 \cdot 10^{-10}$, seguido por $0{,}11 \cdot 10^{-10}$, depois $0{,}12 \cdot 10^{-10}$ e assim por diante até atingir $0{,}99 \cdot 10^{-10}$, donde se passaria a $0{,}10 \cdot 10^{-9}$ até chegar a $0{,}99 \cdot 10^{10}$.

1.5.1 Notação científica e ordem de grandeza

Uma variação simplificada da notação de ponto flutuante e que é utilizada com frequência nos textos técnicos é a chamada *notação científica*. De acordo com este sistema de representação, pode-se dizer que qualquer número N pode ser representado da seguinte forma:

$$N = A \cdot 10^{x} \qquad 1 \leq A < 10 \qquad e \qquad x \in Z \qquad 1.30$$

A notação científica é uma grande ferramenta para expressão de valores extremamente grandes ou pequenos e tem aplicação interessante quando se trata de respeitar as regras de arredondamento e operações aritméticas com algarismos significativos.

Como exemplo de aplicação, será analisada a informação de que se estima que na safra 2014/2015 a região centro-sul do Brasil tenha processado 571.344 mil toneladas de cana-de-açúcar (ÚNICA, 2016). Para transformar este valor em quilogramas, que é a unidade básica do Sistema Internacional de Unidades deve-se escrever 571.344.000.000 kg. Como fica evidente, este número está composto por um enorme grau de incerteza, pois há uma aproximação de um milhão de quilogramas. Além disso é um valor extenso demais para escrever devido à elevada coleção de algarismos que o compõe. Utilizando a notação científica pode-se facilitar a expressão desta quantidade deslocando as casas decimais e ter o seguinte valor:

$$5{,}71344 \cdot 10^{11} \text{ kg}$$

Da mesma forma, ao tratar-se com números que expressam valores muito pequenos, como o tamanho médio estimado dos vírus, que estão entre 0,00000002m e 0,0000003m (entre 20 e 300 nm). Estes números seriam expressos em notação científica da seguinte forma:

$$2 \cdot 10^{-8} \text{ m} \quad \text{e} \quad 3 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

No entanto, muitas vezes o que interessa não é valor exato da grandeza. O que se procura é ter uma ideia do total geral ou da quantidade de unidades com a qual se está trabalhando. No caso da moagem de cana-de-açúcar, por exemplo, necessita-se *estimar* qual será a quantidade de viagens que terão que ser realizadas se os veículos rodoviários utilizados no sistema de colheita transportam em média $2{,}0 \cdot 10^{3}$ kg. Ou então, quão pequeno é um vírus, quando comparado com uma bactéria. Este procedimento recebe o nome de *ordem de grandeza*.

Quando se trata com potências de 10, a notação científica converte-se em uma escala logarítmica com base 10. Por isso as aproximações das medidas realizadas com este tipo de notação numérica baseada na raiz quadrada de 10, um número não periódico cujo valor aproxima-se de 3,1622776601. Aproxima-se este número para 3,16 e, com base na equação 1.29, procede-se da seguinte forma:

- ✓ Se $A \geq 3{,}16$ acrescenta-se uma unidade à potência de 10 que compõe o valor em questão;
- ✓ Se $A < 3{,}16$ a potência de 10 que compõe o número será mantida.

No caso da colheita de cana-de-açúcar tem-se:

- ✓ Massa total colhida: $5{,}71344 \cdot 10^{11}$ kg;
- ✓ $5{,}71344 > 3{,}16$
- ✓ Ordem de grandeza: 10^{12} kg

No caso dos vírus tem-se:

- ✓ Tamanho médio entre $2 \cdot 10^{-8}$ e $3 \cdot 10^{-7}$ m
- ✓ Os valores 2 e 3 são menores que 3,16
- ✓ Ordem de grandeza: entre 10^{-8} e 10^{-7} m

1.4.4 Operações aritméticas com algarismos de precisão e quando se conhece a incerteza da medida

Nas determinações de grandezas físicas, frequentemente se utilizam operações matemáticas com unidades básicas dando origem a unidades derivadas, principalmente em operações de multiplicação, divisão e potenciação, como são os casos de velocidade (M^0LT^{-1}), força (MLT^{-2}), peso específico ($ML^{-3}T^0$) e demais grandezas. Cada uma das grandezas de base é determinada por um instrumento diferente e estes apresentam variados índices de precisão. Assim, cada uma das medidas que será utilizada na construção da unidade derivada terá um determinado número de algarismos significativos e estes valores serão manipulados em operações algébricas. Desta forma, cada um deles carregará consigo um certo grau de imprecisão que deve ser considerado no resultado final da grandeza a ser determinada e, portanto, faz-se necessário uma regra que normalize esse processo.

Além dessas considerações é necessário lembrar que a despeito da imprecisão de cada medida, existe a possibilidade de que o valor obtido para ela carregue consigo um certo grau de erro. Como um valor relativo (x) a uma medida qualquer não é um valor absoluto e sim um intervalo, pode-se dizer que ele, genericamente, seria representado por:

$$x = a \pm \delta a \qquad 1.31$$

em que:

a – é o valor da leitura;

δa – é o valor da incerteza ou do erro da leitura.

Então, quando operações matemáticas forem realizadas com valores que carregam certo grau de incerteza, esta incerteza se espalha pelo resultado, contaminando-o. Por esta razão deve-se cuidar para que o valor resultante da operação não carregue consigo um desvio (erro ou incerteza) maior do que a maior das incertezas implícitas nas medidas utilizadas.

A bibliografia especializada oferece uma série de regras para se operar com as mais variadas formas de se expressar números e valores. No entanto, serão discutidas a seguir, separadamente, técnicas cujo resultado é suficiente para a aplicação do presente texto. Em primeiro lugar discute-se operações com valores cujo desvio é presumido mas desconhece-se sua amplitude e, portanto, enquadram-se no caso dos algarismos de precisão ou significativos.

Adição e Subtração

As operações de adição e subtração de valores cujos erros ou desvios são desconhecidos, mas sua precisão é presumida, não está necessariamente associada aos seus algarismos significativos. Os resultados das operações matemáticas neste caso estão relacionados com o nível de incerteza de cada uma das medidas. Por exemplo, caso haja necessidade de somar as medidas de distância d_1 = 2,56m e d_2 = 4,203m o resultado aritmético será um comprimento de **6,763m**. No entanto a análise dos fatores componentes da soma apresentam as seguintes características:

Valor Absoluto da Medida	Algarismos Significativos	Incerteza	Intervalo
2,56m	3	0,01	$2,555 \leq d_1 \leq 2,564$
4,203m	4	0,001	$4,2025 \leq d_2 \leq 4,2034$

A análise de tais características mostra que a medida d_1 possui uma incerteza aproximadamente 10 vezes maior que a medida d_2. Este fato faz com que seja insensato considerar o valor aritmético da operação de soma como o resultado final da medição, pois ele apresenta casas decimais até o milhar e no entanto seu valor na casa da centena é duvidoso. Para eliminar essa distorção deve-se utilizar no resultado de somas e subtrações com valores, cujo erro é somente presumido, tantas casas decimais quanto as que existirem no fator de menor precisão, ou seja, no presente caso as centenas. Para tanto procede-se no resultado aritmético da operação o devido arredondamento, o que resultará no valor de 6,76m.

Outra técnica que poderia ser utilizada para solucionar tal dificuldade seria o arredondamento de todos os fatores que participam da operação para o mesmo número de precisão decimal da medida menos precisa, antes de realiza-la. Assim, apresenta-se a seguir o exemplo da soma dos valores 2,1875; 0,00361 e 1,08 com os dois métodos.

Método da incerteza		Método do arredondamento prévio
2,1875		2,19
0,00361		0,00
+ 1,08	**+**	+ 1,08
3,27111		3,27
Valor arredondado – 3,27		**Valor apurado – 3,27**

É preciso que fique claro que, ao contrário do que possa parecer, no caso de soma e subtração não é levado em conta o número de algarismos significativos de uma medida ou valor e sim o valor de menor grau de certeza. Como exemplo, pode-se usar o caso em que uma empresa montadora de equipamentos automotivos está projetando um componente e vai ao mercado em busca de peças. Uma das peças (p_1) que se enquadra no dispositivo em projeto traz no catálogo a informação de que seu comprimento é de 1,175m e para a outra peça (p_2) o catálogo indica comprimento de 41,5mm. O problema do montador é estimar o comprimento linear do componente, já que ambas as peças ficarão perfeitamente alinhadas.

Realizando as transformações necessárias para somar as duas medidas resulta:

Valor Absoluto da Medida (m)	Algarismos Significativos	Incerteza (m)	Intervalo	Valor Considerado
p_1 = 1,175	4	0,001	1,1745 ≤ p_1 ≤ 1,1754	1,175
$p_2 = 4{,}15 \cdot 10^{-2}$	3	0,0001	4,154 ≤ p_2 ≤ 4,154	0,0415

A soma aritmética dos fatores *comprimento* das peças que compõe o dispositivo em projeto é 1,2165m. Considerando que a incerteza da medida está na casa dos décimos de milésimo de metro, o algarismo "5" é considerado duvidoso e, portanto, deve ser aproximado. Assim, o valor a ser considerado para o comprimento da peça é 1,217m. Como se nota, a medida final possui quatro algarismos significativos, enquanto que um dos fatores da operação matemática possui apenas três significativos. Desta forma, uma regra prática a observar quando se trata de adição e subtração de valores e medidas é a seguinte:

Ao adicionar e subtrair valores numéricos, o resultado não deverá apresentar maior número de casas decimais do que apresenta o fator com menor número de casas decimais.

Multiplicação e Divisão

O tratamento dado às operações de multiplicação e divisão (assim como à potenciação e à radiciação) difere daquele mostrado para a adição e subtração, pois considera-se de forma preponderante os algarismos significativos dos valores envolvidos. E, nestes casos, o procedimento torna-se mais simples. A regra geral para o arredondamento é:

Ao multiplicar e dividir valores numéricos, o resultado não deverá apresentar maior número de algarismos significativos do que apresenta o fator com menor número de algarismos significativos.

Como exemplo, observe os resultados (arredondados em função dos algarismos significativos) das seguintes operações:

3,1415 x 1,36 = 4,27244 = **4,27**

7 x 0,41 = 2,87 = **3**

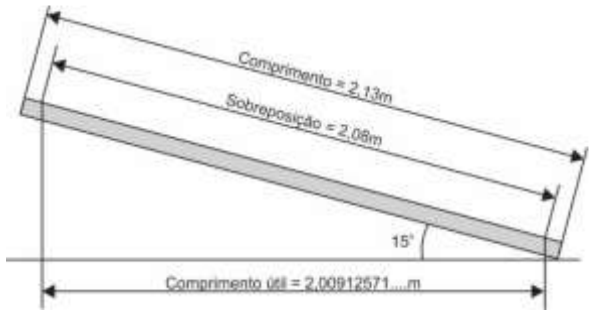
0,48 ÷ 0,3 = 1,6 = **2**

3,41 ÷ 0,1802 = 18,9234184... = **18,9**

Multiplicações e divisões em cadeia

Muitas vezes para se obter um resultado final de um problema é necessário realizar diversas operações e isso pode gerar uma dificuldade, pois arredondamentos de resultados intermediários podem interferir na solução final.

Suponha a seguinte questão: um empreiteiro precisa estimar quantas telhas onduladas de fibrocimento serão necessárias para cobrir uma construção e foi informado que as dimensões do prédio são de 9,5m de largura e 33m de comprimento. O fabricante das telhas informa que suas dimensões são de 1,10m de largura de 2,13m de comprimento, mas que devido a sobreposição perde-se 0,05m nas duas dimensões. A inclinação escolhida para o telhado será de 15º.



- ✓ Largura útil da telha = 1,05m
- ✓ Comprimento útil da telha = 2,08m
- ✓ Área de uma telha = 1,05 x 2,01 = 2,111m^2
- ✓ Área da construção = 9,5 x 33 = 313,5m^2

Figura 1.5 Representação esquemática de uma telha de fibrocimento com inclinação de 15º e respectivos cálculos de área.

A figura 1.5 mostra os cálculos efetuados para determinação das áreas de uma telha e do prédio a ser coberto. O valor do comprimento útil da telha foi arredondado pois sua determinação necessitou do valor do cosseno de 15º que é uma constante. No entanto, as áreas não foram arredondadas. Esse fato está relacionado com os possíveis erros que podem ser cometidos no resultado final quando das operações em cadeia. Neste caso em particular a dimensão do resultado será "telhas", ou seja, procura-se um determinado número de telhas que serão utilizadas na cobertura da construção.

Como regra geral, nas operações de multiplicação e divisão "em cadeia", o resultado de cada operação será arredondado e permanecerá com uma casa decimal a mais do que as existentes naquelas observadas no fator de menor número de algarismos significativos que o gerou. Assim, de acordo com os resultados mostrados na figura 1.5, têm-se:

- ✓ Área de uma telha – 2,111m^2 e;
- ✓ Área da construção – $3{,}14 \cdot 10^2$m^2.

O resultado final do problema será dado pela divisão destas duas áreas e será 148,7467... telhas. Agora que se tem o resultado final, procede-se ao arredondamento e este terá um número de algarismos significativos igual ao do fator com menor número de algarismos significativos utilizado nas operações, que são as dimensões do prédio, ambas com dois significativos. A questão que se coloca agora é: como escrever 149 telhas expressando tal quantidade com apenas dois algarismos significativos? Utiliza-se, nestes casos, do recurso da notação científica e o resultado será $1{,}5 \cdot 10^2$ telhas.

1.5 Princípios básicos de Mecânica Newtoniana aplicada a máquinas agrícolas

A *Mecânica Newtoniana*, é uma das partes da *mecânica clássica*[9] *e* estuda o movimento e suas causas, as variações de energia e as forças que atuam sobre um corpo. Embora a preocupação do ser humano com

[9] Segundo Santos & Orlando (2012), Mecânica Clássica é a parte da ciência que lida com o movimento nas dimensões em que nossos sentidos percebem, ou seja, nem tão pequenos quanto aqueles em que se aplica a Mecânica Quântica, nem tão velozes quanto aqueles em que se aplica a Mecânica Relativística. Os autores dividem a Mecânica Clássica em *Mecânica Vetorial* (desenvolvida pelo formalismo newtoniano) e *Mecânica Analítica* (tratada pelas teorias desenvolvidas por Lagrange e Hamilton).

tais questões seja muito antiga, credita-se a Isaac Newton o trabalho de organizar, generalizar e unificar as regras que definem os fenômenos físicos envolvidos na mecânica do movimento e no equilíbrio dos corpos.

Do ponto de vista didático a mecânica newtoniana poderia ser dividida em três partes, sendo estas conhecidas como *estática* (que estuda a causa dos movimentos), *cinemática* (que estuda os movimentos sem se preocupar com suas causas) e *dinâmica* (que relaciona os movimentos e suas causas e efeitos). A figura 1.6 mostra um esquema que explica a inter-relação entre estas três divisões.

O estudo de cada uma destas partes pode ser resumido a três princípios básicos conhecidos como as três *Leis de Newton*. Como suporte aos fenômenos mecânicos o "ambiente" em que eles ocorrem é conhecido como *Referencial Newtoniano*. Uma aproximação deste referencial poderia ser imaginada como uma sala de um laboratório que contém três eixos cartesianos (ortogonais) graduados (x, y e z) com a origem num de seus vértices, definindo o espaço e um contador de tempo (relógio) que poderia ser observado sempre e de qualquer ponto em que se estivesse posicionado dentro deste referencial. A figura 1.6 ilustra este referencial, também conhecido como *referencial inercial.* Dentro dele a posição de qualquer objeto pode ser determinada pelas coordenadas x', y' e z', num dado tempo t'.

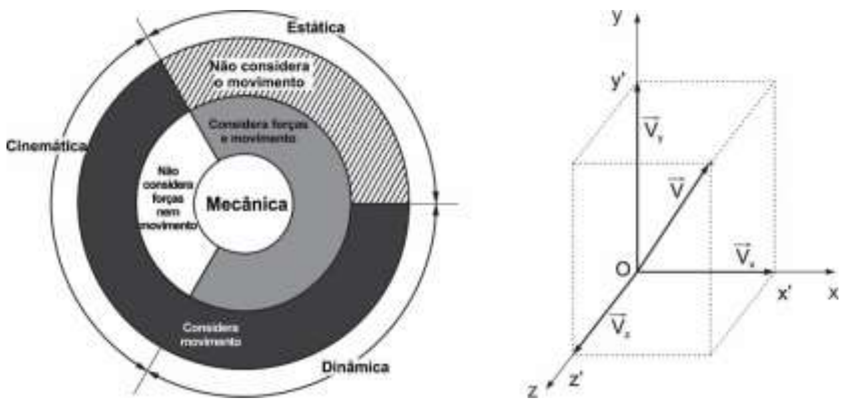


Figura 1.6 Componentes didáticos da mecânica clássica, suas relações e o referencial newtoniano. Adaptado de FERNANDES (2000).

Este sistema admite que o espaço é homogêneo, isotrópico e absoluto. Significa que as distâncias entre duas posições dentro do espaço definido pelas coordenadas x, y e z, podem ser determinadas com um instrumento padrão. Além disso, a medida não depende nem do estado em que o observador se encontra, assim como não depende da posição e da orientação dos pontos que estão em observação. Também o tempo é considerado uniforme. Ele é absolutamente independente do estado do observador que o determina.

O conceito de sistemas de referência permite ao observador determinar em cada instante a posição p de um corpo em relação aos três eixos de forma que $p = (x, y, z)$. À medida que o tempo passa a posição desse corpo pode ser alterada em qualquer dos eixos ou, até mesmo em todos eles. A taxa dessa alteração denomina-se *velocidade* $v = (\Delta x/\Delta t, \Delta y/\Delta t, \Delta z/\Delta t) = (v_x, v_y, v_z)$. Da mesma forma, se for observada uma taxa de variação da velocidade no decorrer do tempo, esta recebe o nome de *aceleração* $a = (\Delta v_x/\Delta t, \Delta v_y/\Delta t, \Delta v_z/\Delta t) = (a_x, a_y, a_z)$ e o movimento descrito ou a mudança de posição observada será a *trajetória* que é função do tempo $p(t)$.

1.5.1 *As leis de Newton*

Primeira Lei de Newton

A primeira lei de Newton também é conhecida como *Princípio da Inércia*. O dicionário Michaelis (2016)[10] define inércia como “falta de ação, falta de atividade, preguiça, indolência, torpor, resistência passiva”. O estado de indolência poderia ser um comportamento que define este primeiro princípio. Seu enunciado é relatado de diversas formas pelos mais variados autores especialistas no assunto, mas uma tradução do original – *Principia* - para o inglês, feita por Andrew Motte[11], diz que a primeira lei de Newton é:

> *Todos os corpos permanecem em seu estado de repouso, ou em movimento retilíneo uniforme, a não ser que sejam compelidos a mudar seu estado por forças neles aplicadas.*

Aos menos avisados pode parecer que este enunciado sugere que não há forças atuando em um corpo em repouso ou em movimento retilíneo e uniforme. No entanto, este mesmo princípio pode ser enunciado da seguinte forma: *a resultante das forças que agem sobre um corpo em repouso ou em movimento retilíneo e uniforme é nula.* Então, neste caso, haveria um equilíbrio das forças atuantes neste dado corpo e seu estado inercial somente seria alterado se uma ou mais forças promovessem seu desequilíbrio.

A partir deste ponto, duas coisas necessitam de definição. Uma delas é *massa*, sem a qual o corpo de que trata a primeira lei de Newton não poderia existir e a outra é a *força*, cuja ação permite desequilibrar um sistema em estado de inércia.

Massa, força e a Segunda Lei de Newton

Intuitivamente pode-se dizer que *massa* é a medida da quantidade de matéria que um corpo possui. No entanto, ao se observar a figura 1.6, nota-se que além das dimensões tempo e espaço, existe também um objeto, ou corpo material envolvido no sistema e é nele que ocorrem alterações de posição no decorrer do tempo. É também intuitivo que tais mudanças (de posição e de velocidade) serão tanto mais exigentes em energia, quanto maior for a massa do objeto. Por exemplo, se ele estiver em repouso em relação ao referencial, quanto maior for sua massa, mais energia será necessária para colocá-lo em movimento. Se estiver em movimento retilíneo e uniforme (velocidade constante) maior será a quantidade de energia para, por exemplo, diminuir esta velocidade quanto maior massa ele possuir. Com estas observações pode-se definir *inércia* como sendo *a propriedade geral da matéria em resistir à alteração de sua velocidade*. Por consequência poder-se-ia dizer que *a massa de um corpo é uma medida de sua inércia*.

Decorrente dessa observação, surge o conceito de *quantidade de movimento* (Q), definido por Newton como sendo *a medida resultante da interação entre massa e velocidade*. Pode-se dizer que, matematicamente, esta medida é dada pela equação 1.32.

$$Q = m \cdot v \tag{1.32}$$

---

[10] Michaelis. Dicionário de português online. Disponível em http://michaelis.uol.com.br/moderno/portugues/ index.php?lingua=portugues-portugues& palavra=in%E9rcia. Acesso em 14 mar 2016.

[11] Ver referências bibliográficas - NEWTON (1846).

Se, num dado referencial uma partícula estiver em equilíbrio (velocidade constante e retilínea) e se a sua massa for considerada constante, então, para que se promova a variação da quantidade de movimento deste sistema seria necessário que se alterasse a velocidade da partícula. Deste fato decorre que seria imputada uma aceleração a ela, resultado da alteração do seu estado de equilíbrio. Considerando as condições anteriores à variação da velocidade como condições iniciais (i) e posterior ao evento condições finais (f), pode-se escrever:

$$\Delta Q = Q_f - Q_i = m \cdot v_f - m \cdot v_i = m \cdot (v_f - v_i) = m \cdot \Delta v \qquad 1.33$$

Sabe-se, dos estudos de cinemática que a equação da velocidade é a derivada primeira da equação do espaço (s) e é expressa por:

$$v = v_0 + at \;\rightarrow\; \Delta v = at \qquad 1.34$$

Substituindo 1.34 em 1.33 tem-se:

$$\Delta Q = m \cdot a \cdot t \qquad 1.35$$

A equação 1.35 significa que a variação da quantidade de movimento de um sistema físico está condicionada à sua massa e à variação da velocidade (aceleração - a) que ele experimentar ao longo do tempo (t). Ou seja, em se considerando o tempo independente, pode-se dizer que quanto mais tempo houver interação entre a massa e a alteração de velocidade, maior será a variação da quantidade de movimento. Á essa interação dá-se o nome de *força* (F) e tem-se que:

$$F = m \cdot a \qquad 1.36$$

Força, portanto, poderia ser definida como *toda causa capaz de provocar em um corpo uma modificação de movimento*. Há, no entanto, um outro efeito creditado a uma força, que é a alteração da forma de um corpo. Devido à resistência do material de que este corpo é constituído e da intensidade da força pode haver alteração das suas dimensões ou na sua geometria. Assim, pode-se dizer que:

> *Força é toda causa capaz de provocar em um corpo uma modificação de movimento, de forma ou de geometria.*

As dimensões da equação 1.36 (MLT^{-2}) definem a grandeza denominada *Newton*, cujo símbolo no Sistema Internacional de unidades é N. A variação da quantidade de movimento recebe o nome de *Impulso* (I) e será definida como:

$$I = \Delta Q = F \cdot t \qquad 1.37$$

A equação 1.36 define a ***Segunda Lei de Newton*** ou o ***Princípio Fundamental da Dinâmica****.* Ela pode ser enunciada da seguinte maneira:

> *A alteração do movimento de um corpo é proporcional à força a ele impressa (ou à resultante das forças que nele atuam) e tal alteração tem a mesma direção desta força.*

Este é um ponto fundamental para entendimento do restante do texto, pois acaba de ser introduzida uma nova questão a ser esclarecida, que é a *direção*. Ao que se refere este termo dentro da área do conhecimento denominada mecânica?

As grandezas de que tratam as tabelas 1.1 e 1.2 têm características diferentes quando se trata de quantificá-las. Pode-se dividir as grandezas em três tipos principais.

Classificação das grandezas

As grandezas com que tratamos podem ser classificadas como *modulares* (aritméticas), *escalares* (algébricas) e *vetoriais* (geométricas).

Modulares

São denominadas *grandezas modulares* aquelas que somente admitem valores numéricos positivos ou independentes de sinal matemático. Tal afirmação não está relacionada com a utilização do valor de determinada grandeza para se processar operações aritméticas ou algébricas e sim com a total impossibilidade de considerar a grandeza como uma entidade negativa, como será explicado a seguir.

Escalares

Grandezas escalares são aquelas que admitem interpretações de valores positivos e negativos, dependendo da sua posição dentro de um referencial convencionado.

Como exemplos práticos pode-se citar um deslocamento considerado positivo como a diferença de posição entre o início e o final da observação de um movimento para a esquerda, a partir de um ponto convencionado como zero. Caso o movimento aconteça, a qualquer momento, para a direita a referência convencionada dirá que o deslocamento será negativo, uma vez que o ponto final terá um valor menor (dentro da escala convencionada) que o ponto inicial da observação. No mesmo exemplo e da mesma forma, o tempo decorrido a partir do início de tal movimento poderá ser considerado positivo e todo o tempo anterior a ele será negativo. Em decorrência disso tem-se velocidades, acelerações e outras grandezas com características positivas e negativas, o que as enquadra como *grandezas escalares*.

Por sua vez, algumas grandezas não teriam significado lógico ou físico se fossem tomadas como negativas. Por exemplo, seria insensato admitir uma área ou um volume negativo. Não tem significado uma resistência elétrica ou (no sistema newtoniano) massa negativa. Estas e outras grandezas são eminentemente *modulares*.

Vetoriais

Algumas das grandezas com que se trata na mecânica necessitam de orientação no espaço. Estas são denominadas vetoriais. São grandezas que exigem, *para sua perfeita determinação, além de um valor numérico seu posicionamento com referência a uma direção e um sentido*. A quantificação dessas grandezas exige, portanto, sua associação a um elemento denominado *vetor*.

A definição de vetor está associada à sua representação geométrica ou gráfica (conforme mostrado na figura 1.7) que é composta por uma seta e se resume a:

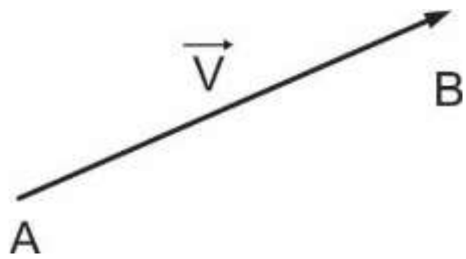


Figura 1.7 Representação gráfica do vetor $\vec{V}$

Vetor é um segmento de reta orientado.

Para o caso da figura 1.7, a notação mais comum para designação de um vetor é dada pelo seu nome (no caso "V") acompanhado por uma seta sobre ele. Pode-se também designá-lo pelas delimitações do segmento de reta que o contém, também acompanhado pela seta. Então, o vetor em questão seria qualificado como $\vec{V}$ ou $\overrightarrow{AB}$, respectivamente.

Características constituintes de um vetor

Um vetor possui um conjunto de características que o define no espaço e as mais utilizadas são a *intensidade* (ou *módulo*), a *direção* e o *sentido*. Além dessas pode-se citar o *suporte*, que é a reta que o contém (também chamada de *reta suporte*) e, portanto, define sua linha de ação e o *ponto de aplicação* que é o local (pontual) do espaço onde a grandeza vetorial age.

Intensidade ou *módulo*

Intensidade ou *módulo* de um vetor é o valor numérico da grandeza que o compõe em número de unidades escalares. Graficamente este componente é representado pelo comprimento do segmento de reta orientado em relação à escala adotada. Quando se deseja fazer referência ao módulo do vetor representado na figura 1.7, por exemplo, será escrito simplesmente V, AB, $|\vec{V}|$ ou $|\overrightarrow{AB}|$.

Direção

Direção de um vetor relaciona-se com o ângulo que sua reta suporte faz com um eixo de referência. Por exemplo, se este eixo de referência for o horizonte visual do planeta Terra e o ângulo formado entre ele e a reta suporte é de 90º, diz-se que a direção é vertical. Porém, não há definição de ele está atuando para cima ou para baixo.

Sentido

Sentido de um vetor refere-se à orientação do segmento de reta que o representa sobre sua reta suporte. Desta forma, retomando o exemplo dado para a direção, de a orientação for apontada para o firmamento, o vetor terá sentido ascendente ou "para cima".

Classificação dos vetores

A classificação dos vetores é definida de acordo com sua posição em relação à reta suporte, ao plano que a contém, assim como sua posição em relação a outros vetores.

Vetores equipotentes e opostos

Equipotentes são os vetores que possuem a mesma intensidade, direção e sentido. Quando apenas o sentido é oposto, denominam-se vetores *opostos.* Um caso partícular ocorre quando os vetores opostos ocupam a mesma reta suporte, recebendo a designação de *diretamente opostos*. A figura 1.8 mostra estas possibilidades.

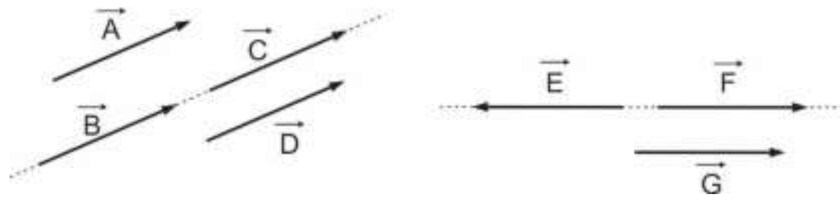


Figura 1.7 Vetores equipotentes entre si: (A, B, C, D) e (F e G); vetores opostos entre si: (E em relação a F e G); vetores diretamente opostos: (E e F).

Vetores colineares

Colineares são vetores que possuem a mesma reta suporte. Não é necessário que sejam equipotentes ou opostos, o que quer dizer que podem possuir intensidades diferentes entre si. Na figura 1.7 B e C assim como E e F são colineares.

Vetores coplanares

Os vetores *coplanares* são aqueles cujas retas suporte encontram-se no mesmo plano. Por conseguinte, se as retas suportes não estiverem colocadas no mesmo plano serão *não coplanares*.

Dentre os vetores coplanares podem ser encontrados os *concorrentes*, que são aqueles cujas direções concorrem para um único ponto. Há também aqueles em que as retas suporte não estão de acordo em um único ponto, mas podem ser paralelas – estes são vetores *coplanares não concorrentes paralelos*. Se não houver nenhuma orientação comum entre as retas suporte além de ocuparem o mesmo plano serão vetores *coplanares não concorrentes e não paralelos*. Exemplos dessas classificações estão na figura 1.8.

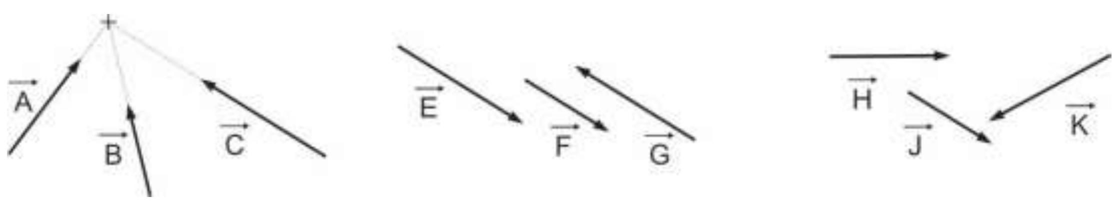


Figura 1.8 Vetores coplanares concorrentes: (A, B e C); vetores coplanares paralelos (E, F e G); vetores coplanares não concorrentes não paralelos: (H, J e K).

Operações básicas com vetores

Determinação gráfica da intensidade, direção e sentido da resultante da ação de dois ou mais vetores

Quando se trata da determinação gráfica do resultado da ação conjunta de duas ou mais grandezas vetoriais existem vários processos de operação. A seguir serão descritos os mais comuns e práticos. Em primeiro lugar será mostrado o processo particular envolvendo somente dois vetores: o processo do triângulo e o do paralelogramo.

Processo do triângulo

Sejam dados dois vetores, A e B conforme mostrado na figura 1.9. Para proceder à soma ou determinar a resultante da ação de A e B, graficamente, procede-se da seguinte maneira: por um ponto O qualquer, traça-se uma linha na mesma direção do vetor A e copia-se este vetor para esta linha conservando suas características. Pela ponta do vetor A, traça-se uma linha na mesma direção do vetor B e copia-se este vetor para esta linha, conservando suas características e cuidando para que seu ponto inicial coincida com o final (com a ponta) do vetor A. Finalmente, traça-se uma linha que liga o início do vetor A com a ponta do vetor B, orientando-a de A para B e este será o vetor soma ou resultante (R) da interação entre A e B.

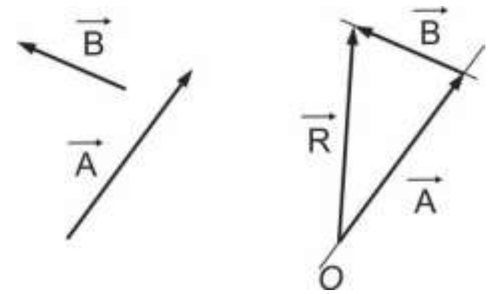


Figura 1.9 Determinação do vetor resultante das ações dos vetores A e B.

Processo do paralelogramo

Sejam os mesmos vetores da figura 1.9. Para determinação da resultante pelo método do paralelogramo coloca-se graficamente os dois vetores num único ponto de origem O, conservando suas características. Em seguida, conforme representado na figura 1.10, traça-se pela ponta do vetor A uma reta paralela ao vetor B e pela ponta do vetor B uma reta paralela ao vetor A, de modo a completar o paralelogramo. O vetor resultante R, será representado graficamente com o segmento de reta situado na correspondente diagonal do paralelogramo.

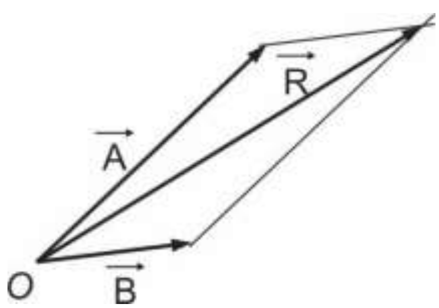


Figura 1.10 Método do Paralelogramo.

Processo do Polígono

O processo do polígono é utilizado quando existem mais de duas grandezas vetoriais interagindo. A figura 1.11 representa um conjunto de cinco vetores. O processo do polígono consiste em organiza-los sequencialmente de modo que o ponto de início do segundo coincida com o final (ponta) do primeiro; o início do terceiro deverá coincidir com o final (ponta) do segundo e assim por diante. O vetor resultante R da soma de todos os vetores do conjunto estudado terá seu ponto de aplicação (início) coincidente com o início do primeiro vetor da sequência e será ligado com a ponta do último vetor da sequência, fechando o polígono.

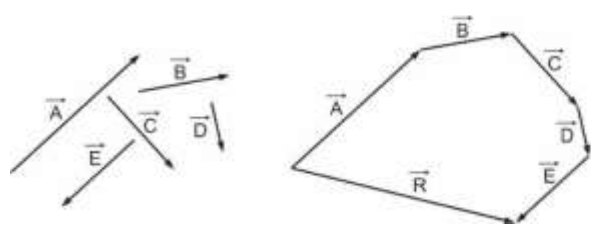


Figura 1.11 Método do polígono.

A notação que se utiliza para determinação da resultante R de um conjunto de vetores ($\overrightarrow{V_n}$) de mesma natureza e coplanares é:

$$\vec{R} = \cdot\, \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2} + \cdots + \overrightarrow{V_n} \qquad 1.38$$

É importante notar que em alguns casos será necessário proceder à subtração entre duas grandezas vetoriais. Neste caso nada deverá mudar, senão o sentido do vetor que está sendo subtraído. Como exemplo pode-se observar a figura 1.12, para o caso de $\vec{R} = \overrightarrow{V_1} - \overrightarrow{V_2}$. Neste caso é utilizado o processo do paralelogramo e está-se fazendo a soma do vetor V_1 com o vetor oposto de V_2. O mesmo pode ser demonstrado para os outros métodos gráficos apresentados.

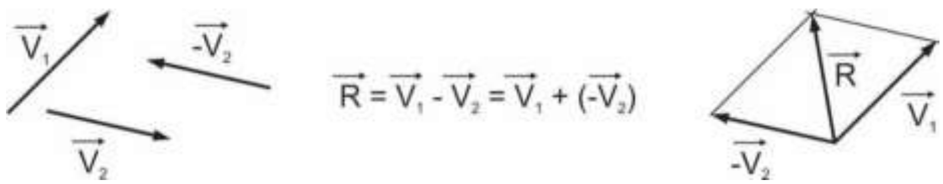


Figura 1.12 Subtração de vetores pelo método do paralelogramo.

Determinação analítica da intensidade da resultante da ação de dois vetores

A determinação analítica permite que seja determinada a intensidade do resultado da ação de dois vetores. Sejam dois vetores V_1 e V_2 que fazem entre si um ângulo α, como representado na figura 1.13. A determinação da resultante R será feita utilizando as relações trigonométricas pertinentes. É interessante dizer que, neste caso, a solução aplica-se de forma generalizada a todos os casos em que há um ângulo entre dois vetores coplanares.

Considerando o triângulo OAB retângulo, pelo teorema de Pitágoras tem-se:

$$R^2 = a^2 + (V_2 + b)^2 \qquad 1.39$$

Como a e b são os catetos do triângulo ABC, cuja hipotenusa tem as mesmas dimensões de V_1 e também se trata de um triângulo retângulo, pode-se escrever:

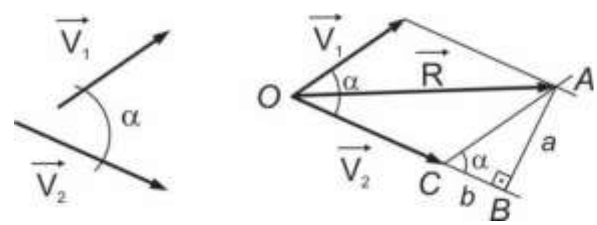


Figura 1.13 Representação das relações geométricas na ação de duas grandezas vetoriais coplanares.

$$a^2 = {V_1}^2 - b^2 \qquad 1.40$$

Substituindo a equação 1.40 em 1.39 e desenvolvendo o binômio existente, tem-se que:

$$R^2 = V_1^2 + V_2^2 + 2V_2 b \qquad 1.41$$

No triângulo ABC é válida a relação $\cos\alpha = \frac{b}{V_1}$ e, portanto, a equação 1.42 pode ser utilizada como forma de determinação analítica destes casos.

$$R^2 = V_1^2 + V_2^2 + 2V_2 V_1 \cos\alpha \qquad 1.42$$

Pode-se imaginar três casos particulares nesta determinação e todos eles estão relacionados com a posição relativa entre os vetores V_1 e V_2.

Caso 1: α = 0 → cosα = 1

Este caso representa a situação em que os vetores são colineares e têm o mesmo sentido. A equação 1.42 ficará:

$$R^2 = V_1^2 + V_2^2 + 2V_2V_1 \rightarrow R^2 = (V_1 + V_2)^2 \rightarrow R = V_1 + V_2 \qquad 1.43$$

Caso 2: α = 90º → cosα = 0

Este caso representa a situação em que os vetores são ortogonais. A equação 1.42 ficará:

$$R^2 = V_1^2 + V_2^2 \qquad 1.44$$

Caso 3: α = 180º → cosα = -1

Este caso representa a situação em que os vetores são diretamente opostos. A equação 1.42 ficará:

$$R^2 = V_1^2 + V_2^2 - 2V_2V_1 \rightarrow R^2 = (V_1 - V_2)^2 \rightarrow R = V_1 - V_2 \qquad 1.45$$

Determinação analítica da posição (direção) da resultante da ação de dois vetores

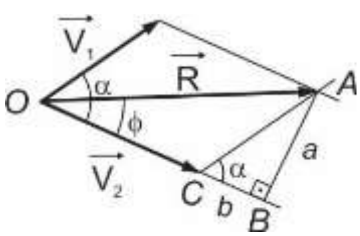


Figura 1.14 Determinação da direção ϕ entre a resultante R e V_2.

A figura 1.14 mostra a ação de dois vetores V_1 e V_2, e sua resultante R. O objetivo será determinar o ângulo formado pela resultante em relação à direção de um desses vetores, por exemplo, em relação a V_2.

Observando a posição das linhas no triangulo OAB, pode-se concluir que:

$$\tan\phi = \frac{a}{V_2 + b}$$

Por sua vez, a observação do triângulo ABC permite concluir que:

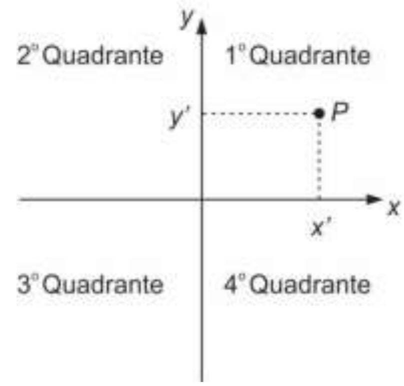
$$a = V_1 \sin\alpha \quad e \quad b = V_1 \cos\alpha$$

Portanto, substituindo devidamente as relações trigonométricas entre si, conclui-se que:

$$\tan\phi = \frac{V_1 \sin\alpha}{V_2 + V_1 \cos\alpha} \qquad 1.46$$

Decomposição vetorial em eixos ortogonais

São considerados *eixos ortogonais* as retas orientadas no espaço, graduadas numa determinada escala e que se interceptam perpendicularmente. São também conhecidas como sistema cartesiano ortogonal e, quando aos pares, definem um plano bidimensional em que, a cada ponto, será localizado por um par de valores correspondentes em cada uma das retas. Convenciona-se representar horizontal o eixo das variáveis independentes (abcissas, normalmente representadas graficamente pela letra x) e no eixo vertical suas funções (ordenadas, normalmente representadas graficamente pela letra y). A figura 1.15 mostra um exemplo de um sistema cartesiano ortogonal que possui um ponto P, localizado nas coordenadas x' e y'. O ponto onde as retas (ou eixos) se cruzam recebe o nome de origem.



1.15 Conjunto de eixos ortogonais representando o ponto $P(x',y')$ e seus quadrantes.

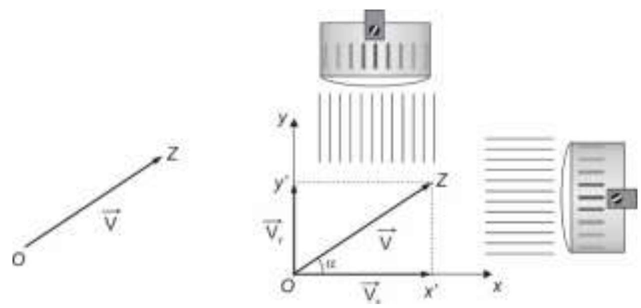


Figura 1.16 Projeção ortogonal do vetor V.

Muitas vezes a posição (direção e sentido) de um vetor está colocada em uma condição em que não representa sua ação dentro de um referencial que foi adotado para se calcular os efeitos da grandeza estudada. A figura 1.16 mostra um caso simples de projeção do vetor V, determinado pelo segmento OZ no sistema de eixos ortogonais formado pelas referências OX e OY. Para fazer a devida projeção coloca-se o vetor V com sua origem coincidindo com a origem do sistema ortogonal cartesiano. Em seguida, como se houvesse um enorme holofote parabólico que emite raios luminosos perfeitamente paralelos, projeta-se a “sombra” do vetor em questão nos dois eixos, determinando os segmentos OX' e OY' que serão as projeções de V no eixo ortogonal x (V_x) e no eixo ortogonal y (V_y), respectivamente. Como se nota na figura o triângulo OZX' é retângulo e, portanto, a intensidade dos vetores resultado das projeções será:

$$V_x = Vsen\alpha \qquad \text{e} \qquad V_y = Vcos\alpha$$

Em outras ocasiões o sistema ortogonal que interessa ser estudado está em desacordo com a orientação horizontal e vertical, como por exemplo, no caso de uma carga de feno (como representado na figura 1.17) que deverá ser transportada numa carreta, por uma rampa asfaltada e que faz um ângulo de 15º com a horizontal. Deseja-se estimar (desconsiderando todas as outras resistências inerentes ao processo) qual será a tração necessária que o trator deverá desenvolver para equilibrar a ação do peso da carreta, contrária ao movimento. Sabe-se que a carreta e a carga pesam, juntas, 17,658kN. Como se pode observar, o trator sobe a rampa e a tração se dá pela barra que está paralela ao plano inclinado. Portanto, o que se busca é saber qual é a força de resistência que atua neste eixo. Para tanto, o peso total do equipamento deverá ser decomposto na direção do plano inclinado e deverá ser determinada a força que atua no sentido contrário ao deslocamento, ou seja, para a esquerda (P_x).

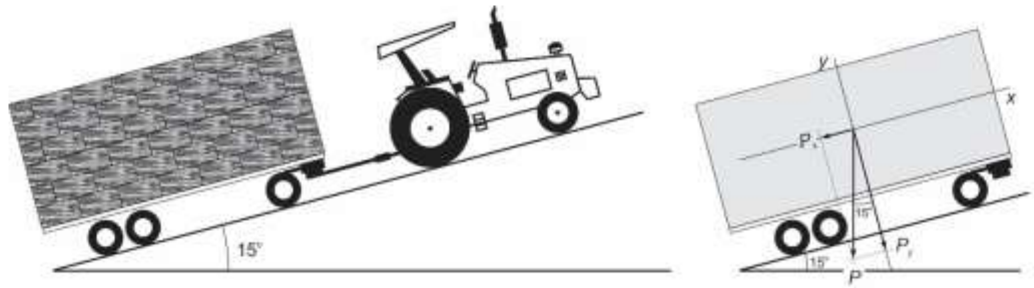


Figura 1.17 Trator tracionando carreta de feno.

Para resolver a questão, coloca-se um par de eixos ortogonais no centro de massa do equipamento, sendo que, normalmente, na posição paralela ao plano inclinado estará a abcissa (eixo x). Como é sabido, o vetor peso (P) é direcionado ao centro do planeta, como representado na figura. Em seguida procede-se à projeção do peso em relação aos eixos ortogonais e se poderá determinar, mediante uso das relações trigonométricas, a intensidade da força decorrente do peso da carreta que é contrária ao movimento ladeira acima da seguinte forma.

$$P_x = Psen15^o = 4{,}570kN$$

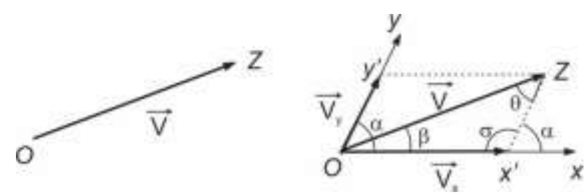
Decomposição vetorial em eixos NÃO ortogonais

Há situações em que não é possível ou não é desejável para a solução dos problemas que a decomposição de um dado vetor seja realizada mediante eixos ortogonais. Então, as projeções se darão em eixos que formam entre si um ângulo que não é reto e a solução ficará sujeita à representação da figura 1.18.

Observando o triângulo OZX' tem-se que:

$$\sigma = 180 - \alpha$$

Utilizando as relações trigonométricas em um triângulo qualquer (conhecidas como lei dos senos) pode-se escrever que:



1.18 Projeção não ortogonal do vetor V.

$$\frac{V}{sen(180-\alpha)} = \frac{V_x}{sen\theta} = \frac{V_y}{sen\beta}$$

Sabe-se que $sen(180 - \alpha) = sen\alpha$ e, portanto, da relação estabelecida pela lei dos senos, pode-se determinar a intensidade das projeções do vetor V em eixos não ortogonais da seguinte forma:

$$V_x = \frac{Vsen\theta}{sen\alpha} \qquad \text{e} \qquad V_y = \frac{Vsen\beta}{sen\alpha}$$

A projeção não ortogonal pode ser considerada uma generalização dos casos. O caso em que o ângulo $\alpha = 90^o$ seria um caso particular, uma vez que $sen90^o = 1$ as relações anteriormente descritas se tornam:

$$V_x = Vsen\theta \qquad \text{e} \qquad V_y = Vsen\beta$$

Da mesma forma os métodos de projeção de vetores em eixos tornam válidos os métodos anteriormente descritos como do *triângulo,* do *paralelogramo* e do *polígono*, como mostra o exemplo da figura 1.19, que refaz o que foi mostrado na figura 1.10, mediante projeções ortogonais.

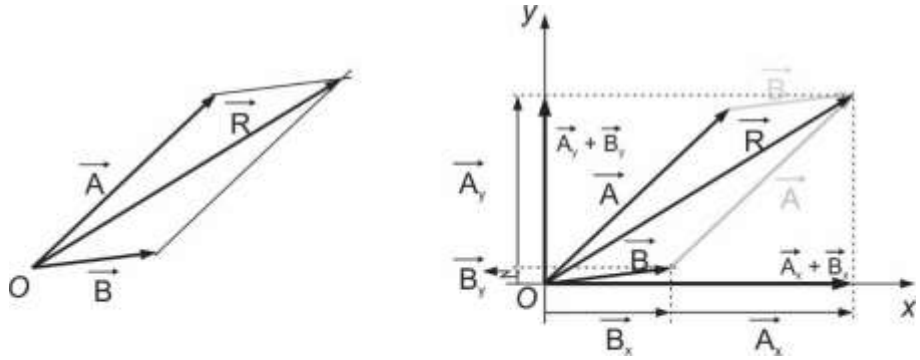


Figura 1.19 Soma dos vetores A e B pelo método do paralelogramo e das projeções ortogonais.

Considerando, portanto, os métodos descritos para as operações básicas com vetores no plano, elas podem ser transportadas para o referencial newtoniano e ser utilizadas no espaço com três eixos ortogonais, como mostra a figura 1.20.

Terceira Lei de Newton e Momento Linear

Decorrente da segunda lei de Newton, pode-se entender qual é a percepção que terá uma pessoa ao tentar levantar uma rocha grande (imagine as dimensões de uma bola de futebol) e logo em seguida um pedaço de madeira de dimensões semelhantes. O mesmo ocorrerá quando esta mesma pessoa tentar colocar os dois objetos em movimento, por exemplo, arremessando-os. É intuitivo que, tanto num caso como em outro, o corpo de menor massa (a madeira) demandará uma força menor para alterar sua posição ou velocidade na mesma proporção comparada à força necessária para provocar o mesmo efeito no corpo de maior massa (a rocha). Como demonstrado pela equação 1.32, dá-se o nome de *quantidade de movimento* para a interação entre a massa de um objeto e sua velocidade. A equação 1.36 define a inércia de um corpo material, estabelecendo que as alterações de velocidade exercida sobre os corpos materiais são diretamente proporcionais às forças a eles aplicadas e inversamente proporcionais às suas massas, ou seja, uma mesma força provocaria maior variação de velocidade no corpo de madeira de que na rocha utilizadas no exemplo em questão. Portanto, um outro enunciado possível para a segunda lei de Newton seria:

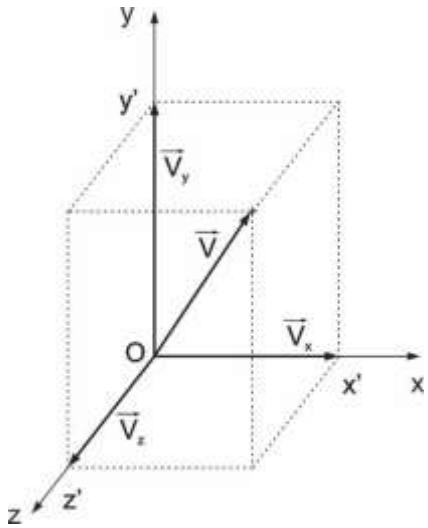


Figura 1.20 Projeção do vetor V nos eixos *x*, *y* e *z*, num referencial newtoniano.

Inércia é a propriedade geral da matéria de permanecer em repouso ou em movimento retilíneo e uniforme quando nela não atuam forças ou a resultante de todas as forças que nela atuam é nula.

Analisando conjuntamente as duas equações, conclui-se que 1.36 pode ser escrita com base em 1.32 e se tornará:

$$F = \frac{mv}{t} = \frac{Q}{t} \qquad 1.47$$

Quando se imagina que uma ou mais forças atuem sobre um corpo material (num dado referencial) gerando uma resultante capaz de alterar sua condição de equilíbrio (e, portanto, sua velocidade), pode-se imaginar também que a causa de tal força seria a existência de um segundo corpo interagindo com o primeiro. Nesse caso, se a massa dos dois corpos for diferente, é de se esperar que o resultado dessa interação seja proporcional à massa de cada um, mas que no final, o todo seja conservado, ou seja, a quantidade total de energia envolvida seja preservada. Para efeitos de simplificação, considere-se que não há perda de energia em forma de calor, vibração, etc. e nem deformação dos corpos envolvidos. Como exemplo utiliza-se o caso do choque entre duas esferas (e_1 e e_2) rígidas, de massas distintas m_1 e m_2, que se deslocam a velocidades v_{1i} e v_{2i}, de sentido contrário e que se chocam no instante t_0, como representado na figura 1.21.

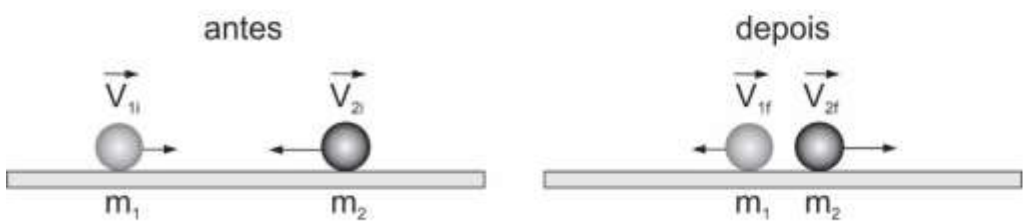


Figura 1.21 Choque perfeitamente elástico entre duas esferas.

Após o choque as esferas se afastam com velocidades v_{1f} e v_{2f}, também em sentidos contrários. Admitindo-se que não há deformação nem perda de energia de qualquer espécie, a quantidade de movimento inicial (Q_i - anterior ao choque) é igual à quantidade de movimento após o choque (Q_f - final). Desta constatação pode-se escrever:

$$Q_i = m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = Q_f = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \qquad 1.48$$

Observando o evento, fica claro que o tempo em que os corpos interagiram é claramente o mesmo para as duas esferas. E se isso realmente ocorreu, qual foi a força que agiu nas esferas e_1 e e_2 no tempo em que elas interagiram? Como $Q_i = Q_f$, a relação entre estas grandezas, expressa na equação 1.48, pode ser reescrita da seguinte forma:

$$m_1(v_{1i} - v_{1f}) = m_2(v_{2f} - v_{2i})$$

Esta relação significa que a variação da quantidade de movimento observada na esfera e_1 é equivalente àquela observada na esfera e_2.Considere-se que: F_1 é a força exercida pela esfera e_1 na esfera e_2; F_2 é a força que a esfera e_2 exerce na esfera e_1. Com base na equação 1.47, conclui-se que:

$$\Delta Q_1 = F_2 \Delta t \quad \text{e} \quad \Delta Q_2 = F_1 \Delta t$$

Como o tempo de interação (Δt) entre as esferas é o mesmo, conclui-se que F_1 e F_2 são forças de mesma intensidade e direção, porém de sentidos contrários. Desta constatação se obtém o enunciado da *terceira lei de Newton*, também conhecida como o *Princípio da Ação e Reação*.

Quando dois corpos interagem e um deles exerce uma força sobre o outro, recebe deste segundo corpo a mesma força em intensidade e direção, porém, em sentido oposto. Ou seja, à toda ação corresponde uma reação de mesma intensidade e direção, no sentido contrário.

Aquilo que se convencionou chamar de quantidade de movimento (Q), é também conhecido como *momento linear* e configura-se numa grandeza fundamental na análise das colisões. É admitido, na física newtoniana que o momento linear é constante (ou seja, a energia total não varia) nos casos do estudo desses fenômenos, o que fica claro quando se observa a equação 1.48, que pode ser escrita da seguinte forma:

$$Q_i - Q_f = 0 \qquad ou \quad m_1(v_{1i} - v_{1f}) - m_2(v_{2f} - v_{2i}) = 0 \tag{1.50}$$

1.5.2 Trabalho e energia

O enunciado que define *energia* utilizado no início deste capítulo faz referência à grandeza física denominada *trabalho*, a qual é frequentemente representada pela letra grega τ. O teorema da energia cinética diz que:

O trabalho mecânico $\boldsymbol{\tau}$ *total realizado sobre um corpo de massa* $\mathbf{m}$*, por uma força constante* $\boldsymbol{F}$ *é igual à variação de energia cinética* $\mathbf{E_c}$ *deste corpo.*

Seja a condição mostrada na figura 1.22. Um bloco de massa m é deslocado pela componente horizontal da força F da posição s_i até a posição s_f.

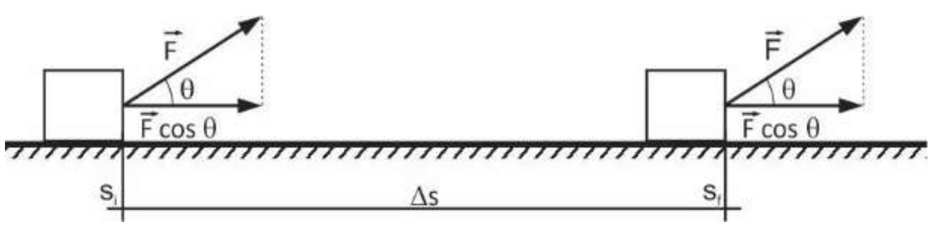


Figura 1.22 Deslocamento, por ação de uma força constante F, de um bloco de massa m, num percurso entre as posições s_i e s_f.

Considere-se, no caso representado na figura 1.22, que a intensidade, direção e sentido da força F permaneçam constantes, o trabalho mecânico (τ) será dado por:

$$\tau = F \cdot (s_f - s_i) \cdot cos\theta = F \cdot \Delta s \cdot cos\theta \qquad 1.51$$

As dimensões da equação 1.51 (ML^2T^{-2}) definem, no Sistema Internacional de Unidades, a grandeza denominada *Joule*, cujo símbolo é J. As equações 1.52 e 1.53 são conhecidas, respectivamente, como equações do espaço e da velocidade no estudo da cinemática[12].

$$s_f = s_i + v_i t + \frac{at^2}{2} \quad \rightarrow \quad s_f - s_i = v_i t + \frac{at^2}{2} \qquad 1.52$$

$$v_f = v_i + at \quad \rightarrow \quad v_f - v_i = at \qquad 1.53$$

Substituindo 1.53 em 1.52, pode-se escrever:

$$\Delta s = v_i t + \frac{(v_f - v_i)t}{2} \quad \rightarrow \Delta s = t\frac{v_i + v_f}{2} \qquad 1.54$$

Isolando-se o tempo na equação 1.53 e substituindo em 1.54, tem-se[13]:

$$\Delta s = \frac{(v_i + v_f)(v_f - v_i)}{2a} = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2a} \qquad 1.55$$

Assumindo, como forma de simplificação que, na figura 1.22 o ângulo θ entre a força e a direção do deslocamento é zero (portanto $\cos\theta = 1$) e substituindo a equação 1.55 em 1.51, tem-se:

$$\tau = F \cdot \frac{v_f^2 - v_i^2}{2a} \qquad 1.56$$

Substituindo a equação 1.36 em 1.56, conclui-se que, realmente, o trabalho mecânico realizado pela ação da força constante F é a variação da energia cinética no corpo de massa *m,* como afirma o teorema*.*

$$\tau = m \cdot \frac{v_f^2 - v_i^2}{2} \quad \rightarrow \quad \tau = \frac{mv_f^2}{2} - \frac{mv_i^2}{2} \quad \rightarrow \quad \tau = \Delta E_c \qquad 1.57$$

A análise da equação 1.57 leva à conclusão de que o trabalho mecânico é resultado das transformações de energia que ocorrem em um dado sistema e sua determinação não leva em consideração o intervalo de tempo em que isso ocorre.

---

[12] A equação 1.53 é a derivada primeira da equação 1.52 em relação ao tempo.

[13] A equação 1.55 escrita como $\boldsymbol{v_f^2 = v_i^2 + 2a\Delta s}$ toma a forma da conhecida equação de Torricelli, muito utilizada na solução de problemas de cinemática.

1.5.3 *Potência*

Quando se busca qualificar ou quantificar o resultado de um procedimento na vida prática, muitas das vezes há necessidade de se considerar o tempo decorrido entre o início e o final do evento. No caso do uso de máquinas que realizam um determinado processo como, por exemplo, um trator que move um arado no trabalho de preparo de solo, necessita-se saber sobre o tempo decorrido e a área trabalhada ao final de uma jornada. Tais informações são úteis para finalidades diversas como determinação de custos de produção, planejamento da execução de um projeto, quantidade de energia necessária ou mesmo comparação entre diversos espécimes quanto às capacidades de realização de uma certa quantidade de trabalho.

Nestes casos, portanto, o tempo passa a fazer parte fundamental da quantificação do fenômeno de transformação de energia e a ele é dado o nome de *potência* (P). Sua determinação é feita mediante a equação 1.58.

$$P = \frac{\tau}{t} \qquad 1.58$$

As dimensões da equação 1.58 (ML^2T^{-3} *ou* J/s) definem, no Sistema Internacional de Unidades, a grandeza denominada *Watt*, cujo símbolo é W.

Mais uma vez, considerando que o ângulo θ da figura 1.22 é nulo e substituindo a equação 1.51 em 1.58, pode-se concluir que o fenômeno da potência pode ser revelado em função da velocidade, de acordo com a equação 1.59.

$$P = \frac{F \cdot \Delta s}{t} = F \cdot v \qquad 1.59$$

1.5.4 *Torque ou momento de força*

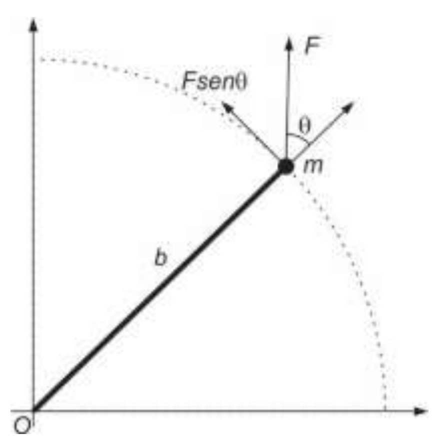


Figura 1.23 Esquema de forças que atuam sobre uma partícula de massa m forçada a girar em torno do ponto O, fixo.

Chama-se *torque* ou *momento* o fenômeno pelo qual submete-se a uma força F, uma partícula presa a uma barra de comprimento b e que pode girar livremente em torno do ponto de origem O (também chamado de *polo*) de um dado referencial, como representado na figura 1.23.

Torque (T) é o efeito causado na extremidade da barra pela força tangencial à trajetória circular em torno do ponto fixo. A equação 1.60 permite determinar o valor escalar da grandeza.

$$T = F \cdot b \cdot sen\theta \qquad 1.60$$

Este fenômeno está relacionado a inúmeras situações da vida prática e auxilia as atividades humanas em diversos casos em que seria quase impossível a realização de tarefas simples como abrir uma torneira, girar a maçaneta de uma porta ou soltar um parafuso. A figura 1.24 mostra duas situações exemplos em que se pode notar o efeito do torque no cotidiano.

Note-se que as dimensões do torque são idênticas às de energia e trabalho (ML^2T^{-2}). No entanto, torque não é sinônimo de energia e usualmente, no sistema internacional usam-se os símbolos de força e comprimento para designar suas dimensões. Portanto, diz-se que as dimensões de torque são Newton-metro (Nm).

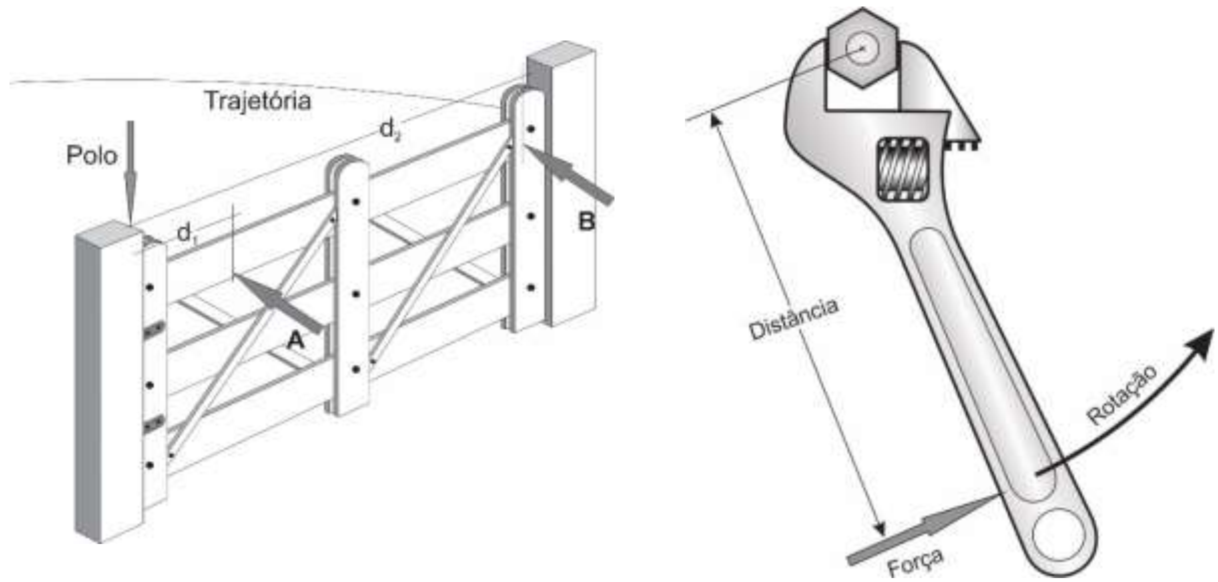


Figura 1.24 Exemplos da aplicação do fenômeno torque no cotidiano.

Os exemplos da figura 1.24 mostram como o fenômeno torque atua. No caso da porteira, se $d_2 = 4d_1$ e, ao tentar abri-la empurrando pelo ponto A ou pelo ponto B, existe uma enorme diferença de forças a se aplicar. Considerando que as forças serão perpendiculares à estrutura nos dois pontos e o esforço para move-la será o mesmo, de acordo com a equação 1.60, tem-se:

$$T_A = F_A \cdot d_1 \quad \text{e} \quad T_B = F_B \cdot 4d_1$$

Se $T_A = T_B$, então:

$$F_A \cdot d_1 = 4F_B \cdot d_1 \qquad \rightarrow \qquad F_A = 4F_B$$

Binário

Binário é o nome dado ao fenômeno que ocorre quando, sobre um determinado ponto, atuam duas forças de mesma intensidade, linhas de ação paralelas, mas em sentidos opostos. O momento resultante de tal ação é o binário que está representado no esquema da figura 1.25. Uma característica importante dos binários é que sua resultante é nula no ponto de origem O considerado. Por convenção adota-se o sinal positivo (+) quando a tendência é de girar o polo no sentido anti-horário e negativo (-) quando tal tendência é horária. Assim, na figura 1.25 o momento (binário) em relação ao ponto O, seria determinado por:

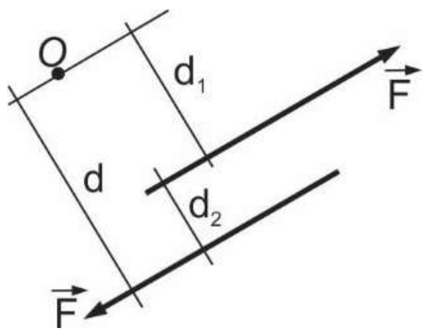


Figura 1.25 Esquema representando duas forças de intensidade F causando um binário em torno do ponto O.

$$\sum M_O = F \cdot d_1 - F \cdot d = 0$$

$$\sum M_O = F \cdot (d_1 - d) = -F \cdot d_2$$

Como se nota, se a intensidade das forças é a mesma, o resultado mostra que a tendência do ponto O é girar no sentido anti-horário, uma vez que $d_1 < d$.

A figura 1.26 representa um volante automotivo. O centro do volante é o ponto de origem (ou polo) e a intensidade das forças que atuam no sistema vale de 20N. Conforme convenção, ambas as forças concorrem para que a rotação seja no sentido horário e, portanto, têm sinal positivo. Então, o momento (binário) em torno dele seria calculado por:

$$\sum M_O = 0{,}2F + 0{,}2F = 8Nm$$

1.6 Movimento Circular Uniforme

Dispositivos mecânicos compostos por rodas dentadas e engrenagens podem ser uma boa representação de um *movimento circular uniforme* (*MCU*). Neste caso em particular a referência a um movimento uniforme está associada à constância do módulo do vetor velocidade ou à chamada *velocidade periférica*. Diz-se, então, que uma partícula descreve um *MCU* quando sua trajetória é feita sobre uma circunferência e sua velocidade linear é uniforme, ou seja, tem módulo constante.

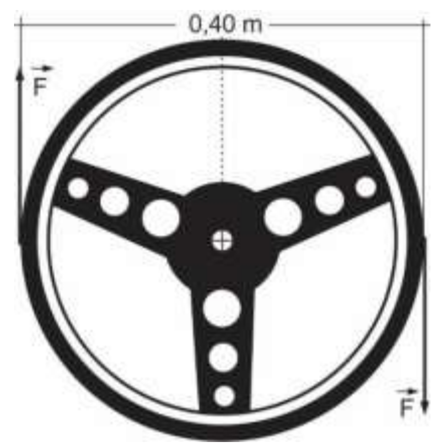


Figura 1.26 Volante de direção de um automóvel sob a ação de duas forças de mesma intensidade, coplanares paralelas e opostas.

Sendo a velocidade é uma grandeza vetorial, ela deve ser orientada dentro de um referencial. Conforme mostrado na figura 1.27, apesar de não haver modificação do seu valor escalar, o vetor velocidade varia em direção e sentido durante o *MCU*. Se ocorre tal variação, por consequência haverá um Δv o que resulta numa aceleração.

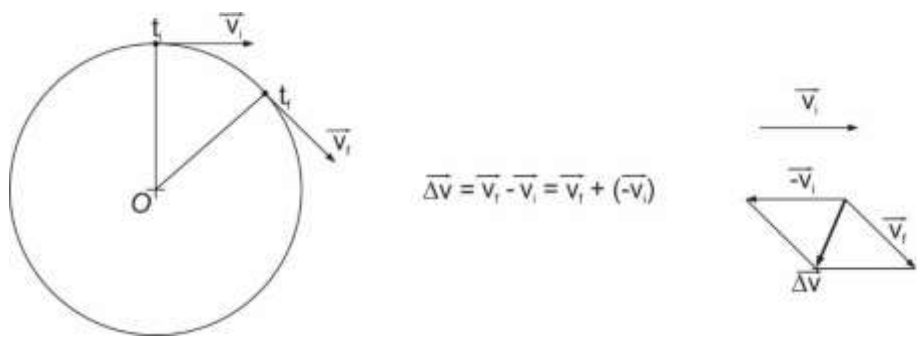


Figura 1.27 Partícula descreve movimento circular uniforme (*MCU*) com velocidade v.

1.6.2 *Aceleração e força centrípetas*

A aceleração observada no *MCU* é denominada de *aceleração centrípeta* (a_c), cuja direção é radial. Quando a partícula que descreve o movimento circular tem massa m ficará sujeita à uma força denominada *centrípeta* (F_c), cuja intensidade será:

$$F_c = m \cdot a_c \qquad 1.61$$

A dedução da equação que permite a determinação da aceleração centrípeta leva em consideração tempos infinitesimais e pode, simplificadamente, ser explicada como se descreve a seguir. Partindo-se da ideia que o módulo da velocidade é constante, sem a mudança de direção a partícula em questão teria um movimento retilíneo e uniforme seguindo a trajetória $\overline{AB}$, representada na figura 1.28. No entanto, considerando um intervalo de tempo infinitamente pequeno, pode-se dizer que ela se desvia ("cai") na direção do centro da circunferência. Tal "queda" leva a partícula para a trajetória circular do *MCU*, e corresponde a uma distância d, no segmento $\overline{OB}$, posicionando-a sobre a linha que delimita a circunferência.

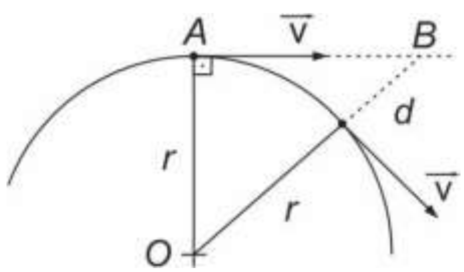


Figura 1.28 Determinação da intensidade da aceleração centrípeta (a_c)

Num tempo (t) infinitamente pequeno, a distância $\overline{AB}$ pode ser determinada em função da velocidade e será:

$$\overline{AB} = v \cdot t$$

Sendo o triângulo *OAB* retângulo, o teorema de Pitágoras define que:

$$(r + d)^2 = r^2 + (vt)^2$$

Resolvendo essa igualdade tem-se que:

$$2rd + d^2 = v^2t^2$$

Como o tempo considerado é muito próximo de zero, a distância d é infinitamente pequena. Assim na igualdade anterior o quadrado deste pequeno valor pode ser desprezado e a igualdade se tornará:

$$d = \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{r} \cdot t^2$$

A distância representada por d na figura 1.28 pode ser considerada um Δs entre os tempos inicial e final da observação deste fenômeno. A velocidade inicial no sentido radial, neste caso, pode ser considerada nula. Introduzindo tais considerações na equação 1.52, tem-se que:

$$\Delta s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

Portanto, se $d = \Delta s$, conclui-se que a intensidade da aceleração centrípeta pode ser determinada por:

$$a_c = \frac{v^2}{r} \qquad 1.62$$

Sabendo que o perímetro da circunferência C de raio r é dado pela equação 1.63, a velocidade linear de uma partícula que se desloca sobre ela será dada pela equação 1.64.

$$C = 2\pi r \tag{1.63}$$

$$v = \frac{2\pi r}{t} \tag{1.64}$$

No entanto, como mostrado nas figuras 1.27 e 1.28, ao deslocar-se sobre a circunferência, no mesmo tempo em que a partícula que tem velocidade v descreve um percurso Δs, ela também descreve um ângulo cujo vértice é o centro da circunferência. Se tal ângulo for θ, então sua relação com o tempo necessário para realizar o movimento recebe o nome de *velocidade angular* (ω) e é dada por:

$$\omega = \frac{\theta}{t} \tag{1.65}$$

1.6.2 Período e frequência

No *MCU* convenciona-se chamar de *período* (T), o tempo que uma partícula descreve uma revolução em torno do centro da circunferência. Suas dimensões são, portanto, M^0L^0T. Por exemplo, o período do planeta Terra em torno de seu eixo de rotação é de 24 horas, ou seja, T = 86,4·10^{3}s.

Outra grandeza importante no *MCU* é a *frequência* (*f*), que se refere ao número de revoluções, na unidade de tempo, que uma dada partícula descreve em torno do centro do movimento. Em resumo, frequência é o inverso do período e, portanto, suas dimensões são $M^0L^0T^{-1}$. A relação entre frequência e período é:

$$f = \frac{1}{T} \tag{1.66}$$

Considerando que uma revolução em torno do centro da circunferência descreve um ângulo de 2π radianos e que o tempo para uma revolução é o período T, as equações 1.64 e 1.65 podem ser reescritas e se tornarão:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \tag{1.67}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} rad \tag{1.68}$$

Substituindo 1.67 em 1.68 e vice-versa, pode-se escrever:

$$\omega = \frac{v}{r} \tag{1.69}$$

$$v = \omega r \tag{1.70}$$

Da mesma forma, pode-se expressar as velocidades linear e angular em função da frequência, substituindo a equação 1.66 em 1.67 e 1.68, obtendo as equações 1.71 e 1.72.

$$v = 2\pi r f \qquad 1.71$$

$$\omega = 2\pi f \qquad 1.72$$

Também a força centrípeta pode ser expressa em função das velocidades linear e angular do *MCU*, substituindo a equação 1.62 em 1.61, obtendo a equação 1.73 e em seguida a equação 1.70 em 1.73, obtendo a equação 1.74.

$$F_c = \frac{mv^2}{r} \qquad 1.73$$

$$F_c = m\omega^2 r \qquad 1.74$$

Nas relações mecânicas práticas é comum que as referências sobre os movimentos circulares (que são quase todos uniformes) seja feita com uma grandeza derivada da frequência e que se use o tempo base em minutos. Tal grandeza é conhecida como rotação e expressa pelas suas iniciais – rpm – rotações por minuto ou, em casos particulares, usando-se o símbolo $\boldsymbol{N}$.

1.6.2 Potência no MCU

A equação 1.59 exprime a potência em função da força e da velocidade, quando um movimento é retilíneo e ocorre deslocamento entre dois pontos separados por uma distância Δs. No entanto, quando se tem um motor que produz movimento rotativo e dele se retira energia para realização das tarefas cotidianas, muitas vezes há necessidade de se determinar a razão em que a energia está sendo transformada e disponibilizada. Assim, é preciso transformar a equação 1.59 em função das relações físicas mostradas nas equações de 1.61 até 1.74.

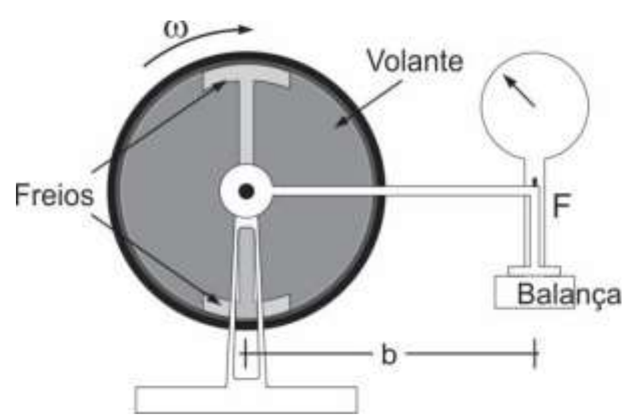


Figura 1.29 Freio dinamométrico.

A figura 1.29 mostra esquematicamente uma estrutura chamada de *freio dinamométrico*. Consta de um mecanismo composto por um conjunto composto por um freio e de um dinamômetro (balança). No sensor da balança (prato) apoia-se uma haste de comprimento b. O sistema de freios está acoplado ao volante do motor que gira a velocidade angular ω, em sentido horário. Quando os freios são acionados as sapatas entram em contato com o volante e o atrito exerce uma força contrária à rotação. Pelo princípio de ação e reação, o volante exerce uma força oposta nos freios e faz com que sua estrutura tenda a girar, também no sentido horário. Este efeito empurra a haste de apoio contra o sensor da balança, provocando uma força de intensidade F. Como resultado do atrito entre as sapatas de freio e o volante, observa-se também alteração de sua velocidade angular. Após estabilizar a força e a velocidade angular e conhecendo-se seus valores, a potência pode ser calculada como descrito a seguir.

Substituindo a equação 1.70 em 1.59 tem-se que:

$$P = F \cdot \omega \cdot r \qquad 1.75$$

Conforme discutido na figura 1.23 e na equação 1.60, a interação entre uma força e um ponto de uma barra, cujo apoio central tende a girar, é *torque* (T) e é isso que ocorre na equação 1.75 e na figura 1.29, quando a haste de comprimento b comprime o sensor da balança. No caso da equação 1.68, considera-se o tempo como se fosse o período. No entanto, se for considerado um tempo (t) qualquer, o objeto em questão realizará um número n de revoluções. Como já foi comentado, em mecânica é comum que esse fato seja assumido como *rotação* e pode ser representado pela letra N. Portanto, pode escrever que:

$$\omega = 2\pi \frac{n}{t} = 2\pi N \qquad 1.76$$

Sendo T o torque desenvolvido e N a rotação observada no exemplo da figura 1.29, a equação 1.75 pode ser escrita como:

$$P = 2\pi N T \qquad 1.77$$

1.7 Exercícios

1. Indique qual é o número de algarismos significativos existentes em cada uma das medidas a seguir:

a) 102,00 b) 0,350 c) 1,0561 d) 0,098 e) $20{,}67 \cdot 10^{-4}$ f) $0{,}0073 \cdot 10^{6}$

2. Escreva as medidas da questão número 1 em notação científica.

3. Considere que os valores expressos a seguir estão representados devidamente quanto aos seus algarismos significativos. Assim, realize o que se pede.

   a) Determine o resultado da soma 2,15+0,3043+800

   b) Determine o número de azulejos (de forma quadrada, com lados de 7 polegadas) que serão necessários para revestir um tanque que será utilizado como espelho d´água, cuja forma é retangular, medindo 6,8m de largura, 12m de comprimento e 45cm de profundidade.

4. Na expressão $\mathbf{F = A}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}$, F representa força e *x* um comprimento. Se MLT^{-2} é a fórmula dimensional da força onde M é o símbolo da dimensão **massa**, L da dimensão **comprimento** e T da dimensão **tempo**, determine a fórmula dimensional de A.

5. Um estudante de física resolvendo certo problema chegou à expressão final: $\mathbf{F = 2(m_1 + m_2)\, vt^2}$ onde *F* representa uma força, m_1 e m_2 representam massas, *v* é uma velocidade linear e *t* é tempo. Outro estudante resolvendo o mesmo problema chegou à expressão: $\mathbf{F = 2(m_1 + m_2)\, vt^{-1}}$. Mesmo sem conhecer os detalhes do problema você deve ser capaz de verificar qual das respostas acima obviamente deve estar errada. Explique qual delas é certamente errada. (VUNESP)

6. Sabe-se que uma esfera de naftalina sublima ao longo do tempo. Um experimento em laboratório levou à conclusão de que a massa *M* final será dada pela expressão: $M = M_0 e^{kt}$, em que *e* é a base dos logaritmos naturais. Determine, no Sistema Internacional de Unidades, quais as dimensões de M_0 e *k.*

7. Um subsolador exige força de tração média de 2.700kgf para se deslocar num dado solo. Se o trabalho for realizado com velocidade média de 4,5km/h, qual será a potência despendida (em kW e cv) no rodado do trator? 1kW = $1{,}36.10^{-3}$cv.

8. As estatísticas indicam que o uso de cinto de segurança deve ser obrigatório para prevenir lesões mais graves em motoristas e passageiros no caso de acidentes. Fisicamente, a função do cinto está relacionada com a:

   a) Primeira Lei de Newton;
   b) Segunda Lei de Newton;
   c) Terceira Lei de Newton;
   d) Primeira e Segunda Lei de Newton;
   e) Primeira e Terceira Lei de Newton

9. A respeito do conceito da inércia, assinale a frase correta:

   a) Um ponto material tende a manter sua aceleração por inércia.
   b) Uma partícula pode ter movimento circular e uniforme, por inércia.
   c) O único estado cinemático que pode ser mantido por inércia é o repouso.

d) Não pode existir movimento perpétuo, sem a presença de uma força.
e) A velocidade vetorial de uma partícula tende a se manter por inércia; a força é usada para alterar a velocidade e não para mantê-la.

10. Um homem, no interior de um elevador, está jogando dardos em um alvo fixado na parede interna do elevador. Inicialmente, o elevador está em repouso, em relação à Terra, suposta um Sistema Inercial e o homem acerta os dardos bem no centro do alvo. Em seguida, o elevador está em movimento retilíneo e uniforme em relação à Terra. Se o homem quiser continuar acertando o centro do alvo, como deverá fazer a mira, em relação ao seu procedimento com o elevador parado?

a) mais alto;
b) mais baixo;
c) mais alto se o elevador está subindo, mais baixo se descendo;
d) mais baixo se o elevador estiver descendo e mais alto se descendo;
e) exatamente do mesmo modo.

11. Julgue as afirmações abaixo:

I - Se um corpo sob a ação de várias forças está em equilíbrio, então esse corpo só pode estar em repouso.
II - Um corpo permanece em movimento retilíneo uniforme ou em repouso quando não existe nenhuma força atuando sobre ele.
III -Quando a resultante das forças que atuam sobre um corpo é nula, esse corpo permanece em repouso ou em movimento uniforme em qualquer direção.
IV - Um objeto sob a ação de várias forças está em equilíbrio, isso significa que ele pode estar em repouso ou em movimento retilíneo uniforme.

a) Somente I está correta
b) III e IV estão corretas
c) Somente III está correta
d) Somente II está correta
e) Somente IV está correta
f) Todas estão incorretas

12. Uma folha de papel está sobre a mesa do professor. Sobre ela está um apagador. Dando-se, com violência, um puxão horizontal na folha de papel, esta se movimenta e o apagador fica sobre a mesa. Uma explicação aceitável para a ocorrência é:

a) nenhuma força atuou sobre o apagador;
b) a resistência do ar impediu o movimento do apagador;
c) a força de atrito entre o apagador e o papel só atua em movimentos lentos;
d) a força de atrito entre o apagador e o papel provoca, no apagador, uma aceleração muito inferior à da folha de papel.
e) a força de atrito entre o papel e a mesa é muito intensa;

13. Um corpo de massa 4,0 kg encontra-se inicialmente em repouso e é submetido a ação de uma força cuja intensidade é igual a 60 N. Calcule o valor da aceleração adquirida pelo corpo.

14. Uma pessoa que na Terra possui massa igual a 80kg, qual seu peso na superfície da Terra? E na superfície da Lua? (Considere a aceleração gravitacional da Terra 9,8m/s² e na Lua 1,6m/s²).

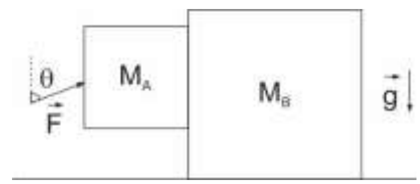
15. A ordem de grandeza de uma força de 1000N é comparável ao peso de:

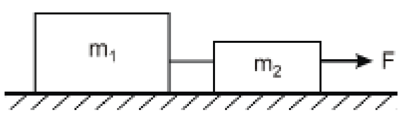
a) um lutador de boxe peso pesado. b) um tanque de guerra.
c) um navio quebra-gelo. d) uma bola de futebol.
e) uma bolinha de pingue-pongue.

16. Um carro com massa 1000 kg partindo do repouso, atinge 30m/s em 10s. Supõem-se que o movimento seja uniformemente variado. Calcule a intensidade da força resultante exercida sobre o carro.

17. Um dinamômetro possui suas duas extremidades presas a duas cordas. Duas pessoas puxam as cordas na mesma direção e sentidos opostos, com força de mesma intensidade F = 100N. Quanto marcará o dinamômetro?

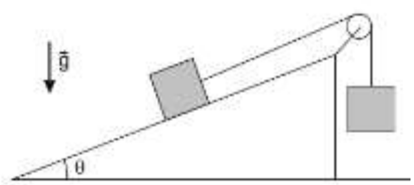
18. A figura a seguir ilustra dois blocos A e B de massas M_A = 2kg e M_B = 1kg e não existe atrito entre o bloco B e a superfície horizontal, mas há atrito entre os blocos. Os blocos se movem com aceleração de 2,0 m/s² ao longo da horizontal, sem que haja deslizamento relativo entre eles. Se sen θ = 0,6 e cos θ = 0,80, qual o módulo, em newtons, da força aplicada no bloco A?





19. Dois blocos, de massas m1=3,0 kg e m2=1,0 kg, ligados por um fio inextensível, podem deslizar sem atrito sobre um plano horizontal. Esses blocos são puxados por uma força horizontal F de módulo F=6 N, conforme a figura ao lado. Determine a tensão no fio.

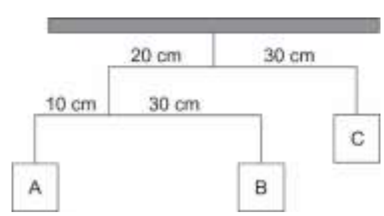
19. Dois blocos idênticos, de peso 10 N, cada, encontram-se em repouso, como mostrado na figura a seguir. O plano inclinado faz um ângulo = 37° com a horizontal, tal que são considerados sen(37°) = 0,6 e cos(37°) = 0,8. Sabe-se que os respectivos coeficientes de atrito estático e cinético entre o bloco e o plano inclinado valem μe = 0,75 e μc = 0,25. O fio ideal passa sem atrito pela polia. Qual é o módulo da força de atrito entre o bloco e o plano inclinado nestas condições? Força de atrito Fa = μN.



20. Na questão 14, qual deveria ser o peso mínimo do bloco pendente para que o sistema estivesse na iminência de movimento?

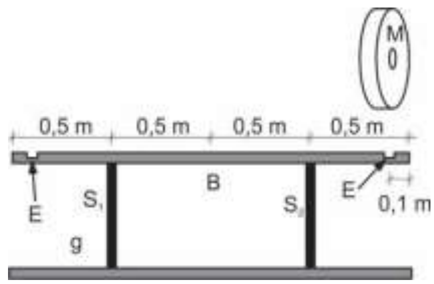
21. Se como peso declarado na questão 15 o movimento tiver início, qual será a velocidade do sistema após 3s?

22. A figura mostra um móbile constituído por duas barras de massas desprezíveis que sustentam os corpos A, B e C por fios ideais. Sendo a massa do corpo A 45 g, a massa do corpo C, que mantém o conjunto em equilíbrio na posição indicada, qual deve ser a massa do corpo C?

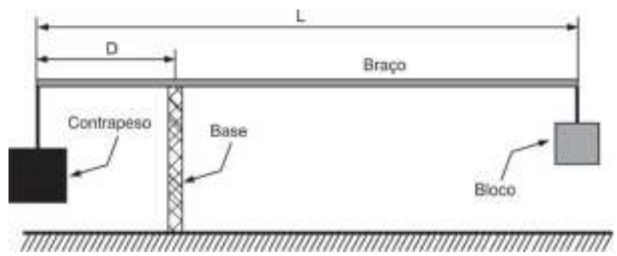


23. Em uma academia de musculação, uma barra B, com 2,0m de comprimento e massa de 10kg, está apoiada de forma simétrica em dois suportes, S1 e S2, separados por uma distância de 1,0m, como

indicado na figura abaixo. Para a realização de exercícios, vários discos, de diferentes massas M, podem ser colocados em encaixes, E, com seus centros a 0,1m de cada extremidade da barra. O primeiro disco deve ser escolhido com cuidado, para não desequilibrar a barra. Os discos disponíveis, têm massas de 5kg, 10kg, 15kg, 20kg e 25kg. Qual deles seria escolhido por você? Porque?



24 Um guindaste é composto de um braço, apoiado em uma base vertical, e um contrapeso pendurado em uma de suas extremidades. A figura mostra esse guindaste ao sustentar um bloco na extremidade oposta.



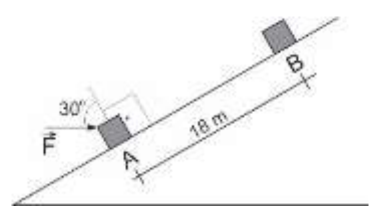
O braço do guindaste é homogêneo, tem uma massa M_{br} = 400 kg e o comprimento L = 15,0 m. O contrapeso tem massa de M_{cp} = 2,0 x 103 kg e está pendurado a uma distância D = 5,0 m da base. Nessas condições o sistema se encontra em equilíbrio. Considere g = 10 m/s2.

a) Calcule a massa M_{bl} do bloco.
b) Calcule a força exercida pela base sobre o braço do guindaste.

25. Um sólido de massa m = 100 kg desliza sobre um plano horizontal sob a ação de uma força constante paralela ao plano. O coeficiente de atrito entre o móvel e o plano é 0,10. O corpo passa por um ponto A com velocidade 2,0 m/s e, após o intervalo de 10 s, passa por um ponto B com a velocidade de 22,0 m/s.

a) Qual o módulo da força?
b) Qual o trabalho realizado pela força durante o deslocamento de A para B?

26. Na figura a seguir, uma força F horizontal, constante e de intensidade 100 N atua sobre um corpo de massa m = 2,0 kg, deslocando-o do ponto A ao ponto B, num percurso de 18 m. Calcule o trabalho realizado pela força F neste deslocamento AB.



27. Uma esteira rolante transporta 15 caixas de bebida por minuto, de um depósito no subsolo até o andar térreo. A esteira tem comprimento de 12 m, inclinação de 30º com a horizontal e move-se com velocidade constante. As caixas a serem transportadas já são colocadas com a velocidade na esteira. Se cada caixa pesa 200 N, qual é a potência que o motor que aciona esse mecanismo deve fornecer, admitindo-se que não há perdas no sistema?

Respostas

1- a) 5 b) 3 c) 5 d) 2 e) 6 f) 4

2. a) $1{,}0200 \cdot 10^2$ b) $3{,}5 \cdot 10^{-1}$ c) 1,0561 d) $9{,}8 \cdot 10^{-2}$ e) $2{,}067 \cdot 10^{-3}$ f) $7{,}3 \cdot 10^3$

3. a) 801 b) 2.722,5

4. $ML^{-1}T^{-2}$

5. Seguramente o aluno 1 está errado. Sua conclusão leva a uma equação dimensional de MLT o que não é coerente com a equação de força MLT^{-2}.

6. *Kg* e *Hz*	7. 33,1kW / 45cv	8. a	9. e
10. e	11. e	12. d	13. $15ms^{-1}$
14. 748N / 128N	15. a	16. 3.000N	17. 100N
18. 10N	19. 4,5N	20. 4N	21. 12N
22. $1{,}81ms^{-1}$	23. 40g	24. 10kg	25. 900kg / 33.000N
26. a) 300N b) 36kJ	27. 900J		